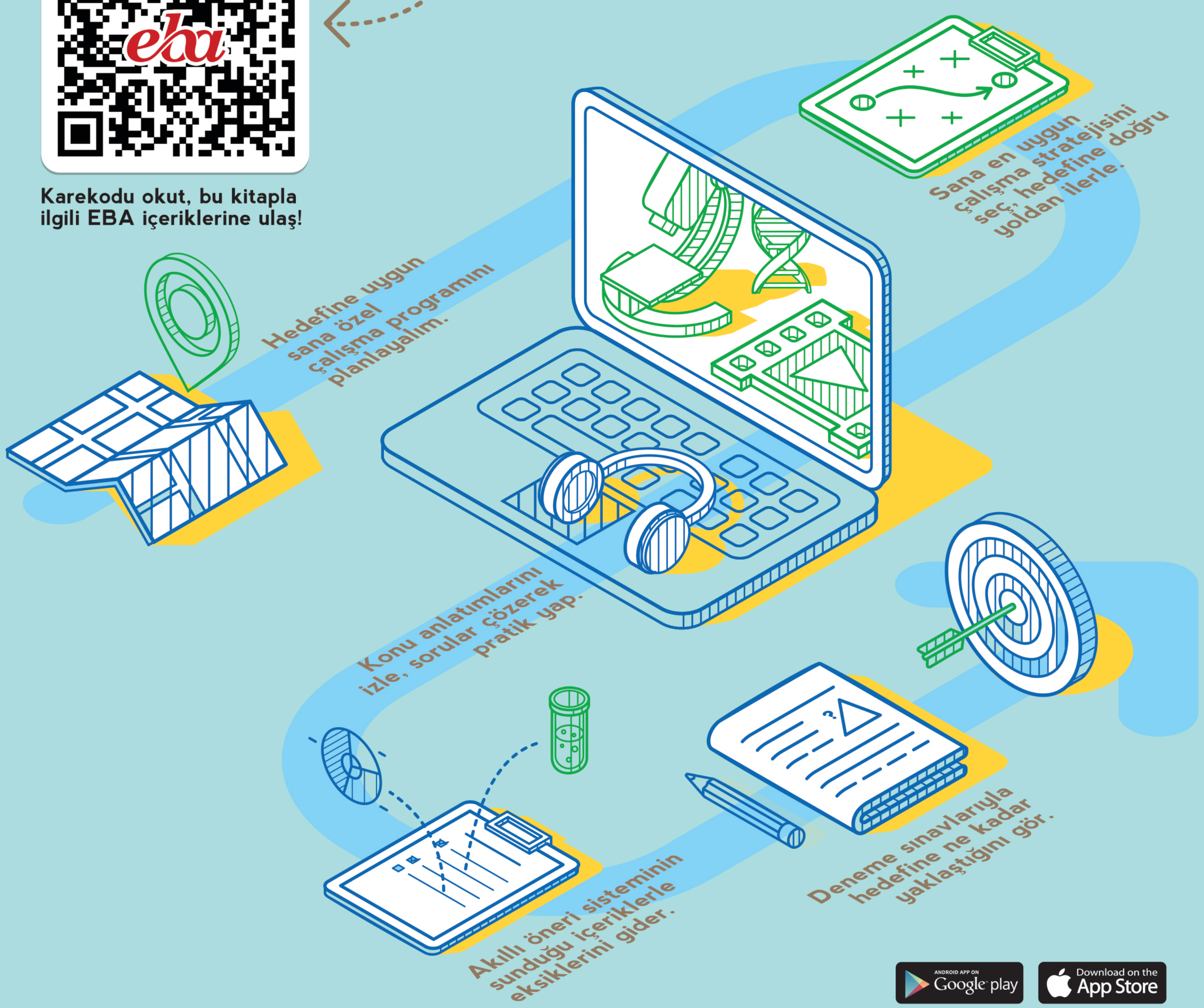
Bu kitaba sığmayan daha neler var!

Karekodu okut, bu kitapla ilgili EBA içeriklerine ulaş!



ORTAÖĞRETİM MATEMATİK 11. SINIF DERS KİTABI

T.C. MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI | ORTAÖĞRETİM | DERS KİTABI

MATEMATİK



11. SINIF

SDR DİKEY YAYINCILIK

ORTAÖĞRETİM

MATEMATİK

11

DERS KİTABI

Millî Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulunun 09.05.2022 tarih ve 36 sayılı kurul (ekli listenin 22'inci sırasında) kararıyla 2023-2024 öğretim yılından itibaren 5 (beş) yıl süreyle Ders Kitabı olarak kabul edilmiştir.
Kurulca bu kitabın kabul edilmiş olması ders kitabından yayınevi ve yazarın sorumluluğunu kaldırmaz.

YAZAR

Celalettin KESKİN

SDR DİKEY YAYINCILIK

ISBN:
978-975-9168-78-0

Editör
Oktay BAĞCI

Dil Uzmanı
Engin EKİCİ

Görsel Tasarım Uzmanı
Aysel GÜNEY TÜRKEÇ

Program Geliştirme Uzmanı
Zeynep TIRAŞ

Ölçme Değerlendirme Uzmanı
Kenan GEDİK

Rehberlik / Gelişim Uzmanı
Hamdi GÖKTAŞ

SDR DiKEY YAYINCILIK

Kavacık Subayevleri Mah. Fahrettin Altay Cad. No.: 4/8 Keçiören/ANKARA

tel.: (0.312) 318 51 51- 50 • belgegeçer: 318 52 51



İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

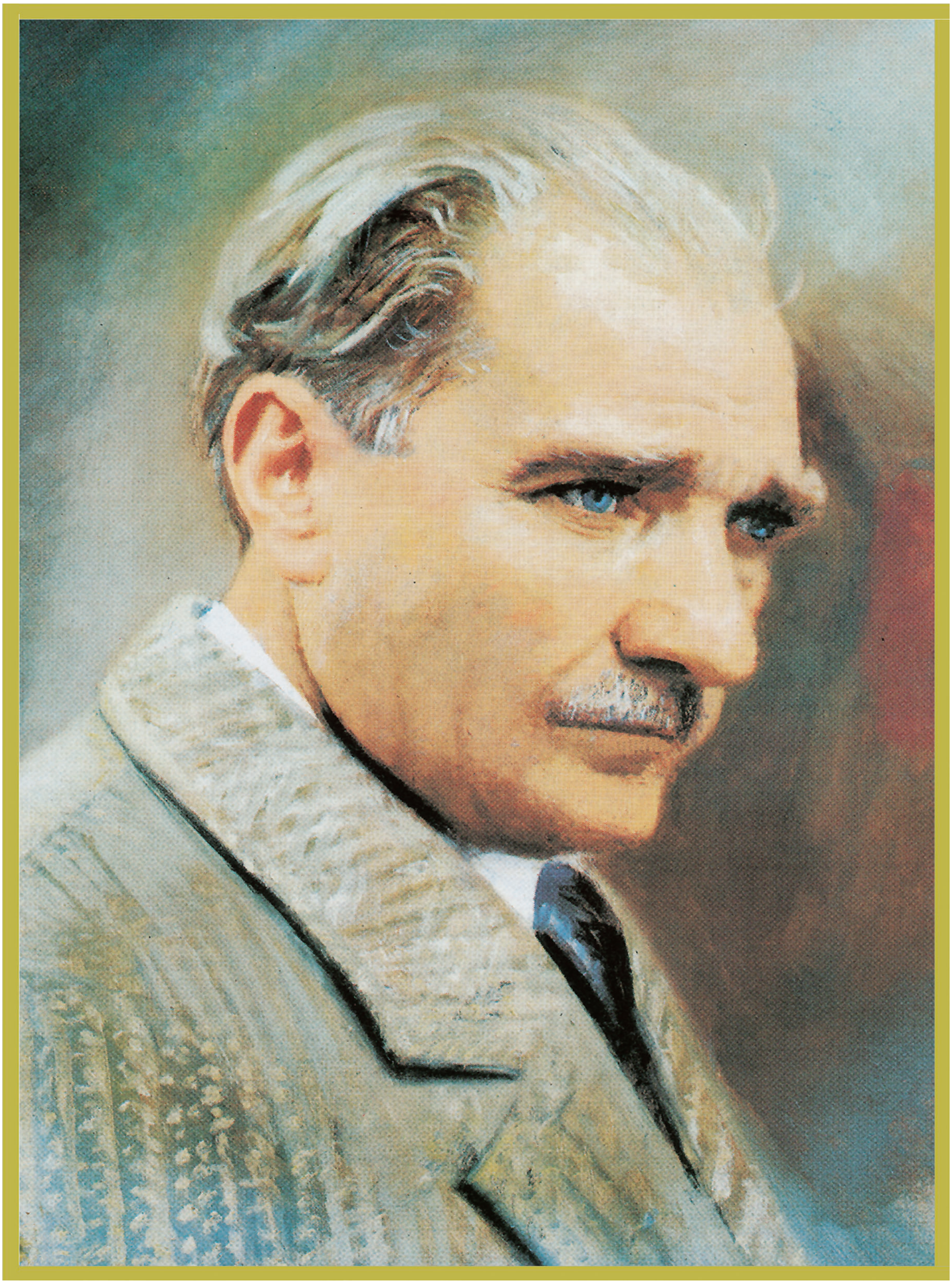
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

ORGANİZASYON ŞEMASI

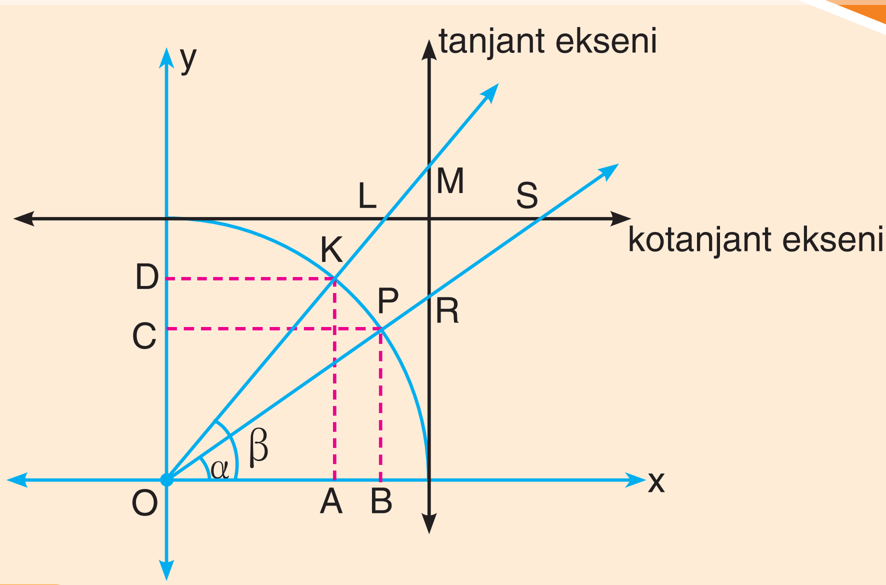
Açıklama	Bölüm
Bilim insanlarının matematik alanındaki çalışmaları bu bölümde verilmiştir.	Okuma Metni
İşlenecek konulara hazırlık için önceki bilgileri hatırlatma sorularının verildiği bölümdür.	Hazırlık Çalışması
Örnekler ve çözümleri bu bölümde verilmiştir.	Örnek / Çözüm
Tanım ve açıklamalar bu bölümde verilmiştir.	Bilgi
Bu bölümde özellikler ve teoremler verilmiştir. Bazı teoremlerin ispatları yapılmıştır.	Özellik
Öğrencilerin öğrendiklerini uygulaması için etkinlik verilmiştir.	Etkinlik
İşleniş sonunda alıştırmalar verilmiştir.	Alıştırmalar
Bilgi-iletişim teknolojilerinin kullanıldığı bölümlerdir.	Bilgi-İletişim Teknolojisi
Geçmiş bilgilerin hatırlatıldığı bölümdür.	Hatırlatma
Elde edilen sonuçların verildiği bölümdür.	Sonuç
Dikkat edilmesi gereken kısımların verildiği bölümdür.	!
Konuların sonunda değerlendirme sorularının verildiği bölümdür.	1. DEĞERLENDİRME SORULARI
Dijital içeriklerin, soruların ve ek soruların verildiği bölümdür.	(QR kod)
Alt öğrenme alanı ile ilgili terim, sembol ve gösterimlerin bulunduğu bölümdür.	Terimler ve Semboller

1

TRİGONOMETRİ

Bu bölümde;

- Açı ölçü birimlerini açıklayarak birbiri ile ilişkilendirmeyi,
- Trigonometrik fonksiyonları,
- Kosinüs teoremiyle ilgili problemleri çözmeyi,
- Sinüs teoremiyle ilgili problemleri çözmeyi,
- Trigonometrik fonksiyon grafiklerini çizmeyi,
- Sinüs, kosinüs, tanjant fonksiyonlarının ters fonksiyonlarını öğreneceksiniz.



Terimler ve Semboller

Terimler ve Kavramlar: yönlü açı, derece, dakika, saniye, radyan, esas ölçü, trigonometrik fonksiyon, periyot, periyodik fonksiyon

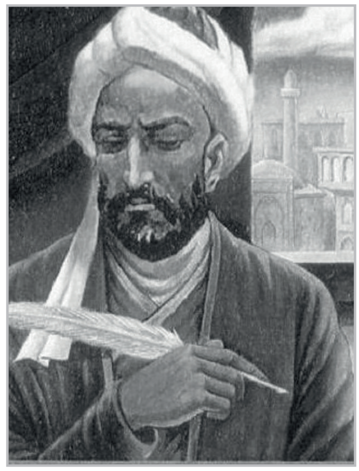
Sembol ve Gösterimler: °, ′, ″, R, sin x, cos x, tan x, cot x, cosec x, sec x, arcsin x, arccos x, arctan x, T, $f(x+T)$

Okuma Metni

Nasîrüddin Tûsî (1201-1274)

Trigonometri terimi, Yunancadan gelen trigon (üçgen) ve metron (ölçüm) sözcüklerinin birleşiminden meydana gelmiştir.

Trigonometrinin başlangıcı, Mısır ve Mezopotamya'ya dayanmaktadır. Dairenin 360° ye bölümü, bu dönemden kalmadır. Astronomideki gelişmelere paralel olarak küresel trigonometri de gelişmiştir. MÖ 4. yüzyılda Hinduların trigonometriyi astronomide kullandıkları bilinmektedir. İskenderiyeli Claudius Ptolemy (Kıladyus Pitolemi), "Almagest" adlı eserinde (MÖ 150), trigonometrik oranlara yer vermiştir. Müslüman matematikçiler, trigonometride önemli gelişmeler kaydetmişlerdir. El-Battani (850-929), küresel üçgende kosinüs teorisini ortaya koymuştur. Ebû'l-Vefâ (940-998), küresel üçgende sinüs teoremini bulmuş, trigonometrik cetvel hazırlamıştır. Nasîruddîn Tûsî (1201-1247), ilk defa düzlem ve küresel trigonometriyi astronomiden ayırarak matematiğin bir bölümü olarak ele almıştır. Tûsî, bu konuda ilk eser veren matematikçidir.



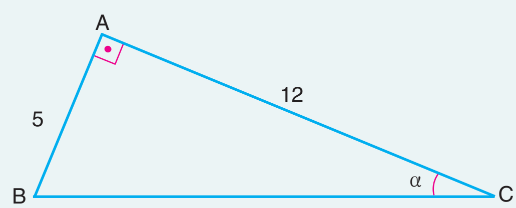
Nasîrüddin Tûsî (temsilî)

Önceleri topoğrafya (harita bilimi), denizcilik ve astronomide kullanılan trigonometri, 17. yüzyıldan itibaren büyük gelişme göstermiştir. Trigonometrik fonksiyonlar ve ters trigonometrik fonksiyonlar incelenmiş, kompleks sayılarla ilgili araştırmalar yapılmıştır. Trigonometri, elektrik devrelerinin ve ses dalgalarının analizinde kullanılmış; trigonometrik seriler gibi daha ileri konulara geçilmiştir.

Genel ağdan alınmıştır.

Hazırlık Çalışması

1. Yandaki $\widehat{ABC}$ nde, $[AB] \perp [AC]$, $|AB| = 5$ br, $|AC| = 12$ br, $m(\widehat{BCA}) = \alpha$ olduğuna göre $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ ve $\cot\alpha$ değerlerini bulunuz.



2. $4x^2 - 16y^2$ cebirsel ifadesini çarpanlarına ayırınız.

3. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ fonksiyonu için aşağıdaki cümlelerin başındaki kutucuğa yargı doğru ise "D", yanlış ise "Y" yazınız.

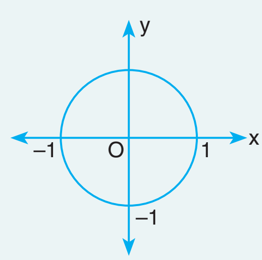
a) ☐ $f(x)$ fonksiyonu bire birdir.

b) ☐ $f(x)$ fonksiyonu örtendir.

c) ☐ $f^{-1}(x) = -x - 1$'dir.

ç) ☐ $f(2) = 6$'dır.

4. Yandaki birim çemberde $\sin 150°$ ve $\cos 150°$ değerlerini bulunuz.



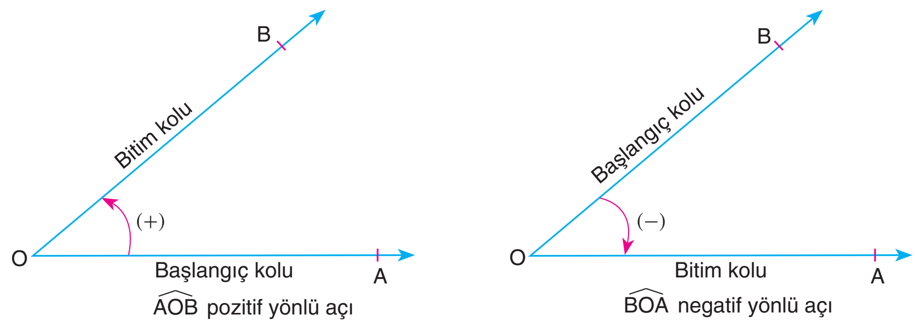
1.1. YÖNLÜ AÇILAR

1.1.1. Yönlü Açı Kavramı

Başlangıç noktaları ortak olan iki ışının birleşim kümesine açı denir. Bu bölümde yönlü açı, derece, radyan, birim çember ve esas ölçü kavramlarından bahsedeceğiz.

Bilgi

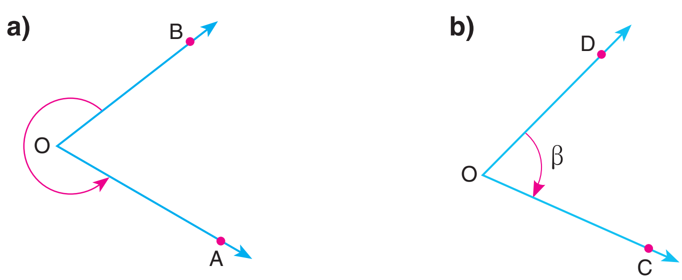
Kollarından biri başlangıç, diğeri bitiş olarak belirlenmiş açıya **yönlü açı** denir.



Saatin dönme yönünün tersi yönündeki açılara **pozitif yönlü açılar**, saatin dönme yönündeki açılara **negatif yönlü açılar** denir.

Örnek

Aşağıdaki açıların yönlerini belirtelim.



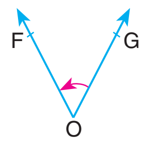
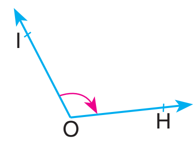
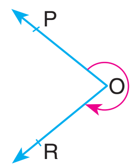
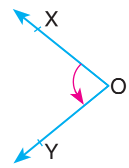
Çözüm

a) [OB başlangıç kolu, [OA bitim koludur. Bu yönlü açı, saatin dönme yönünün tersi yönünde olduğundan $\widehat{BOA}$ pozitif yönlü açıdır.

b) [OD başlangıç kolu, [OC bitim koludur. Bu yönlü açı saatin dönme yönünde olduğundan $\widehat{DOC}$ negatif yönlü açıdır.

Etkinlik

Aşağıda verilen açılar için tablodaki boşlukları uygun biçimde doldurunuz.

Sembol gösterimi	$\widehat{GOF}$			
Açı				
Başlangıç kolu	[OG			
Bitim kolu	[OF			
Yönü	Pozitif			

1.1.2. Açı Ölçü Birimleri

Açının kolları arasındaki açıklığa **açının ölçüsü** denir. Bu ölçü, açı ölçü birimleri kullanılarak ifade edilir.

Açı ölçü birimleri derece, radyan ve graddır.

Derece

Bilgi

Bir çember 360 eşit parçaya bölündüğünde bu parçalardan her birini gören merkez açının ölçüsüne **1 derece** denir.

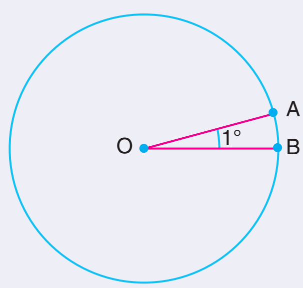
Derece " ° " sembolü ile gösterilir.

$1°$ nin $\frac{1}{60}$'ına **1 dakika** denir. Dakika " ′ " sembolü ile gösterilir.

$1° = 60'$ dır.

$1'$ nın $\frac{1}{60}$'ına **saniye** denir. Saniye " ″ " sembolü ile gösterilir.

$1' = 60''$ dir. Çemberin derece cinsinden ölçüsü 360°dir.

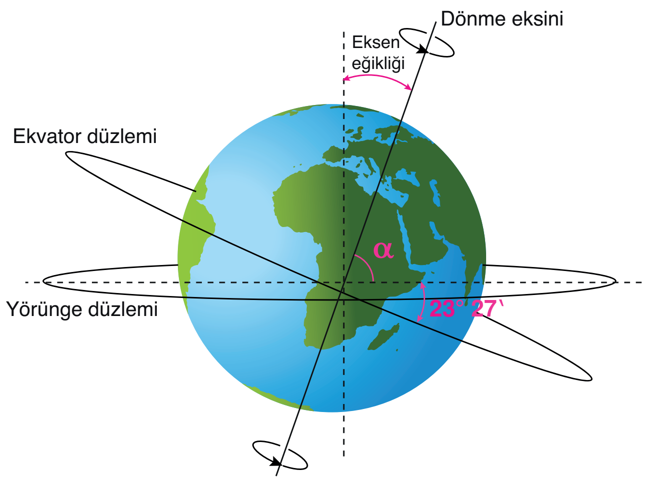


Örnek

Yer ekseniyle yörünge düzlemi birbirine dik değildir. Yer ekseni ile ekvator düzlemi birbirine diktir.

Yörünge düzlemi ile Ekvator düzlemi arasında 23° 27′ lık bir eğiklik vardır. Bu eğikliğe **Dünya'nın eksen eğikliği** denir. Eksen eğikliği, mevsimlerin oluşmasına neden olur.

Dünya'nın yörünge düzlemi ile yer ekseni arasındaki açının ölçüsünü bulalım.



Çözüm

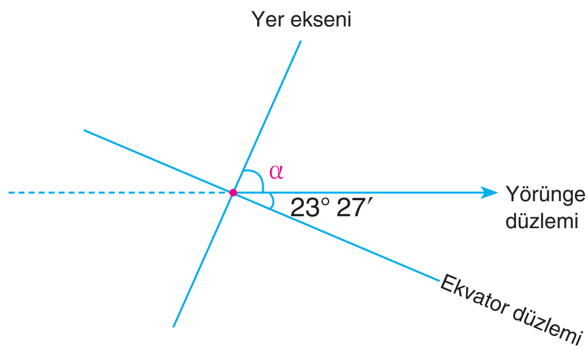
Yer ekseni ile Ekvator düzlemi birbirine diktir. Yörünge düzlemi ile Ekvator düzlemi arasındaki açı 23° 27′ olduğundan

$\alpha + 23°\,27' = 90° \Rightarrow \alpha = 90° - (23°\,27')$ dır. $90° = 89°\,60'$ olarak yazılabilir.

Buradan

$$\begin{array}{r} 89°\,60' \\ -\ 23°\,27' \\ \hline 66°\,33' \end{array}$$

$\alpha = 66°\,33'$ bulunur.



Örnek

19455″ lik açıyı derece, dakika ve saniye cinsinden bulalım.

Çözüm

1′ = 60″ olduğundan 19455″ nin de kaç dakika olduğunu bulalım.

$$\begin{array}{r|l} 19455 & 60 \\ \cline{2-2} -180 & 324 \\ \hline 0145 & \\ -120 & \\ \hline 0255 & \\ -240 & \\ \hline 015 & \end{array}$$

19455″ = 324′15″ dir. 1° = 60′ olduğundan 324′ nın içinde kaç derece olduğunu bulalım.

$$\begin{array}{r|l} 324 & 60 \\ \cline{2-2} -300 & 5 \\ \hline 024 & \end{array}$$

Buradan 19455″ = 5°24′15″ bulunur.

Örnek

Bir $\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{A}) = 43° \, 27' \, 15''$ ve $m(\widehat{B}) = 51° \, 37' \, 47''$ olduğuna göre $m(\widehat{C})$ nü bulalım.

Çözüm

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180°$dir.

$$\begin{array}{rl} & 43° \; 27' \; 15'' \\ + & 51° \; 37' \; 47'' \\ \hline & 94° \; 64' \; 62'' \quad (62'' = 1' \; 02'') \\ & 94° \; 65' \; 02'' \quad (65' = 1° \; 05') \\ & 95° \; 05' \; 02'' \end{array}$$

$m(\widehat{C}) = 180° - (95° \, 05' \, 12'') \qquad (180° = 179° \, 59' \, 60'')$

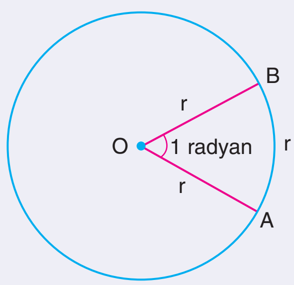
Buradan

$$\begin{array}{rl} & 179° \; 59' \; 60'' \\ - & 95° \; 05' \; 02'' \\ \hline & 84° \; 54' \; 58'' = m(\widehat{C}) \text{ bulunur.} \end{array}$$

Radyan

Bilgi

Bir çemberde yarıçap uzunluğundaki bir yayı gören merkez açının ölçüsüne **1 radyan** denir.



Yarıçapı r olan bir çemberin çevresinin uzunluğu $2\pi r$'dir.

Yanda verilen O merkezli çemberde AOB açısının ölçüsü 1 radyandır. Yarıçap uzunluğu r olan bir çemberin çevresi $2 \cdot \pi \cdot r$'dir. buna göre doğru orantı kullanılarak

1 radyan — r uzunluğundaki bir yayı gören merkez açıya karşılık geliyor ise

x radyan — $2\pi r$ uzunluğundaki bir yayı gören merkez açıya karşılık gelir.

$x \cdot r = 2\pi r \cdot 1 \Rightarrow x = 2\pi$ olur. Buradan çemberin çevresi 2π radyan olarak yazılır.

Bir çember yayının ölçüsü derece olarak 360°, radyan olarak 2π radyandır. Dereceyi D, radyanı R ile gösterirsek $\frac{D}{360°} = \frac{R}{2\pi}$ yazabiliriz. Bu eşitliğin paydalarını 2 ile sadeleştirirsek

$\frac{D}{180°} = \frac{R}{\pi}$ bağıntısını elde ederiz.

Açı ölçü birimleri, bu bağıntı kullanılarak birbirine dönüştürülür.

Örnek

Aşağıda verilen açıların ölçülerini derece cinsinden bulalım.

a) $\frac{2\pi}{3}$ radyan **b)** $\frac{3\pi}{8}$ radyan **c)** $\frac{5\pi}{4}$ radyan **ç)** $\frac{5\pi}{6}$ radyan

Çözüm

a) $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{2}{3}$

$3D = 2 \cdot 180^\circ$

$D = 120^\circ$ olur.

b) $\frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{3\pi}{8}}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{3}{8} \Rightarrow 8D = 3 \cdot 180^\circ$

$D = 3 \cdot \frac{180^\circ}{8}$

$D = 67,5^\circ$ olur.

c) $\frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{5\pi}{4}}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{5}{4} \Rightarrow 4D = 5 \cdot 180^\circ$

$D = 225^\circ$ olur.

ç) $\frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{5\pi}{6}}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{5}{6} \Rightarrow 6D = 5 \cdot 180^\circ$

$D = 150^\circ$ bulunur.

Örnek

Aşağıda ölçüleri derece cinsinden verilen açıların ölçülerini radyan cinsinden bulalım.

a) 210° **b)** 330° **c)** 15°

Çözüm

a) $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{210^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow 180^\circ \cdot R = 210^\circ \pi$

$R = \frac{210^\circ \pi}{180^\circ}$

$R = \frac{7\pi}{6}$ olur.

b) $\dfrac{330^\circ}{180^\circ} = \dfrac{R}{\pi} \Rightarrow 180^\circ \cdot R = 330^\circ \pi$

$$R = \frac{330^\circ \pi}{180^\circ}$$

$$R = \frac{11\pi}{6} \text{ olur.}$$

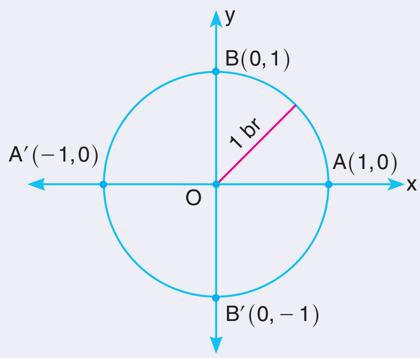
c) $\dfrac{15^\circ}{180^\circ} = \dfrac{R}{\pi} \Rightarrow 180^\circ R = 15^\circ \pi$

$$R = \frac{15\pi}{180^\circ}$$

$$R = \frac{\pi}{12} \text{ bulunur.}$$

Bilgi

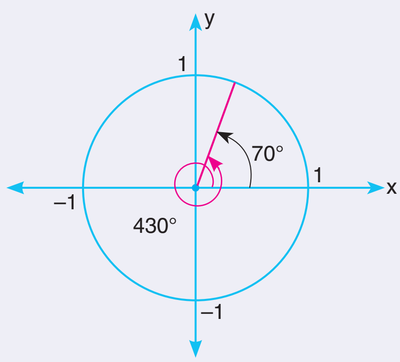
Analitik düzlemde merkezi orijinde bulunan ve yarıçapının uzunluğu 1 br olan çembere **birim çember** denir.



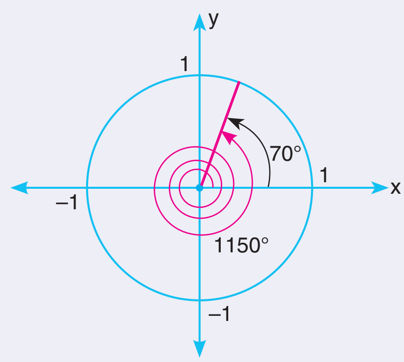
Açının Esas Ölçüsü

Bilgi

Birim çember üzerinde bir açının bitim kollarından başlayarak pozitif yönde her 360°lik dönme sonucunda yine aynı noktaya gelinir. Örneğin 70°yi alalım.



$430^\circ = 70^\circ + 360^\circ$



$1150^\circ = 70^\circ + 3 \cdot 360^\circ$

Birim çember üzerinde bitim noktaları aynı olan açılardan ölçüsü $[0^\circ, 360^\circ)$ veya $[0^\circ, 2\pi)$ aralığındaki açıya bu **açıların esas ölçüsü** denir.

Bilgi

$0° \leqslant \theta < 360°$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere ölçüsü $\theta + k \cdot 360°$ olan açıların esas ölçüsü θ derecedir.

$0 \leqslant \theta < 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere ölçüsü $\theta + k \cdot 2\pi$ radyan olan açıların esas ölçüsü θ radyandır.

Açının birimi ne olursa olsun esas ölçü daima pozitif yönlü bir açıdır.

Örnek

Esas ölçüsü 75° olan açıların ölçülerini radyan cinsinden bulalım, küme şeklinde gösterelim.

Çözüm

Esas ölçüsü 75° olan açıların kümesi,

$\{x : x = 75° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}\}$ dir. 75° ve 360°yi radyan cinsinden yazalım.

$$\frac{D}{180°} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{75°}{180°} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow 180° \cdot R = 75°\pi$$

$$R = \frac{75°\pi}{180°}$$

$$R = \frac{5\pi}{12}\text{'dir.}$$

$360° = 2\pi$ olduğundan

$\left\{x : x = \frac{5\pi}{12} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

Örnek

Esas ölçüsü $\frac{\pi}{3}$ radyan olan açıların ölçülerini derece cinsinden bulalım, küme şeklinde gösterelim.

Çözüm

Esas ölçüsü $\frac{\pi}{3}$ radyan olan açıların kümesi,

$\left\{x : x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ dir. Şimdi $\frac{\pi}{3}$ ve 2π yi derece cinsinden yazalım.

$$\frac{D}{180°} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180°} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\pi} \Rightarrow 180° \cdot \frac{\pi}{3} = D \cdot \pi$$

$$D = \frac{180° \cancel{\pi}}{3\cancel{\pi}}$$

$$D = 60° \text{ olur.}$$

$2\pi = 360°$ olduğundan

kümesi, $\{x : x = 60° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}\}$ bulunur.

Örnek

Aşağıdaki açıların esas ölçülerini bulalım.

a) $215°$ **b)** $2640°$ **c)** $-170°$ **ç)** $-1240°$

Çözüm

a) $0° \leqslant 215° < 360°$ olduğundan $215°$ esas ölçüdür.

b) $2640°$ nin esas ölçüsü α olsun. Bu durumda

$2640° = \alpha + k \cdot 360°$ olmalıdır $(0 \leqslant \alpha < 360°, k \in \mathbb{Z})$.

$$\begin{array}{r|l} 2640 & 360 \\ \hline - \ 2520 & 7 \\ \hline 120 & \end{array}$$

Bölme işleminin sağlamasından

$2640° = 120° + 7 \cdot 360°$ olur. Buradan

$\alpha = 120°$ bulunur.

c) $-170°$ nin esas ölçüsü θ olsun. Bu durumda

$-170° = \theta + k \cdot 360°$ olmalıdır $(0 \leqslant \theta < 360°, k \in \mathbb{Z})$.

$$\begin{array}{r|l} -170 & 360 \\ \hline - \ \pm 360 & -1 \\ \hline 190 & \end{array}$$

Bölme işleminin sağlamasından

$-170° = 190° + (-1) \cdot 360°$ olur. Buradan

$\theta = 190°$ bulunur.

ç) $-1240°$ nin esas ölçüsü β olsun. Bu durumda

$-1240° = \beta + k \cdot 360°$ olmalıdır $(0 \leqslant \beta < 360°, k \in \mathbb{Z})$.

$$\begin{array}{r|l} -\ 1240 & 360 \\ \hline - \ \pm\ 1440 & -4 \\ \hline 200 & \end{array}$$

Bölme işleminin sağlamasından

$-1240° = 200° + (-4) \cdot 360°$ olur. Buradan

$\beta = 200°$ bulunur.

Örnek

Aşağıdaki açıların esas ölçülerini bulalım.

a) $\frac{2\pi}{3}$ radyan **b)** $\frac{27\pi}{4}$ radyan **c)** $-\frac{2\pi}{3}$ radyan **ç)** $-\frac{27\pi}{4}$ radyan

Çözüm

a) $0 \leqslant \frac{2\pi}{3} < 2\pi$ olduğundan $\frac{2\pi}{3}$ esas ölçüdür.

E-İçerik

b)
$$\frac{27\pi}{4} = \frac{3\pi + 24\pi}{4}$$
$$= \frac{3\pi}{4} + \frac{24\pi}{4}$$
$$= \frac{3\pi}{4} + 6\pi$$
$$= \frac{3\pi}{4} + 3 \cdot 2\pi \ (k = 3 \in \mathbb{Z})\text{dir.}$$

Esas ölçü $\frac{3\pi}{4}$ bulunur.

c) $-\frac{2\pi}{3}$ açısının esas ölçüsü α olsun.

$-\frac{2\pi}{3} = \alpha + k \cdot 2\pi$ olmalıdır $(0 \leqslant \alpha < 2\pi, k \in \mathbb{Z})$.

$$-\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} - \frac{6\pi}{3}$$
$$= \frac{4\pi}{3} - 2\pi$$
$$= \frac{4\pi}{3} + (-1) \cdot 2\pi \ (k = -1 \in \mathbb{Z})$$

Esas ölçü $\frac{4\pi}{3}$ bulunur.

ç) $-\frac{27\pi}{4}$ açısının esas ölçüsü θ olsun.

$-\frac{27\pi}{4} = \theta + k \cdot 2\pi$ olmalıdır $(0 \leqslant \theta < 2\pi, k \in \mathbb{Z})$.

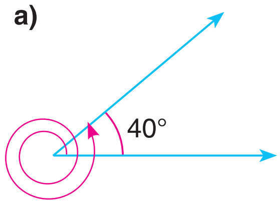
$$-\frac{27\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} - \frac{32\pi}{4}$$
$$= \frac{5\pi}{4} - 8\pi$$
$$= \frac{5\pi}{4} + (-4) \cdot 2\pi \ (k = -4 \in \mathbb{Z})$$

Esas ölçü, $\theta = \frac{5\pi}{4}$ bulunur.

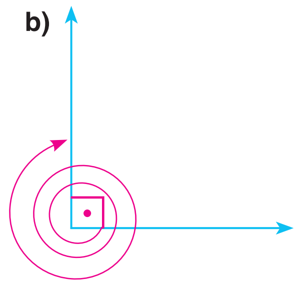
Örnek

Aşağıda verilen açıları $\theta = \alpha + k \cdot 360°$ veya $\theta = \alpha + k \cdot 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ biçiminde ifade edelim.

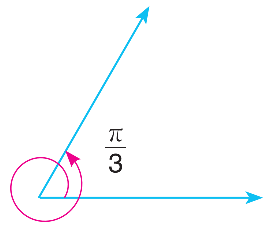
a)



b)

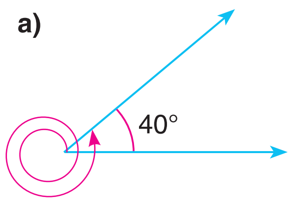


c)



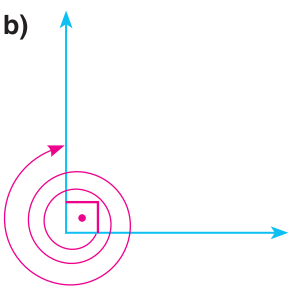
Çözüm

a)



Açı, pozitif yönde iki tam tur atmış ve açının kolları arasında pozitif yönde 40°lik açı oluşmuştur. Buradan $\theta = 40° + 2 \cdot 360°$dir.

b)



Açı, negatif yönde iki tam tur atmış ve açının kolları arasında negatif yönde 270°lik açı oluşmuştur.

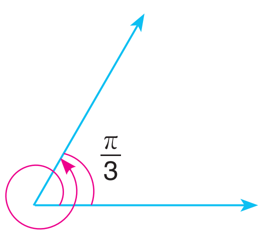
Açının ölçüsü $= 2 \cdot (-360°) + (-270°)$

$= -990°$

$$\begin{array}{r|l} 990 & 360 \\ \cline{2-2} \pm\,1080 & -3 \\ \hline 90 & \end{array}$$

Açı negatif yönlü olduğundan $-990°$ nin esas ölçüsü 90° olur. Buradan $\theta = 90° + (-3) \cdot 360°$dir.

c)



Açı, pozitif yönde bir tam tur atmış ve açının kolları arasında pozitif yönde $\frac{\pi}{3}$ radyanlık açı oluşmuştur. Buradan $\theta = \frac{\pi}{3} + 1 \cdot 2\pi$ dir.

Alıştırmalar 1-1

1. 15 620″ lik açının eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3°15′45″ B) 4°15′15″ C) 4°20′20″ D) 4°19′25″ E) 5°20′40″

2. Bir $\widehat{ABC}$ nde $|AB| = |AC|$ ve $m(\widehat{B}) = 68°\ 36'\ 20''$ olduğuna göre A açısının ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?

A) 42°47′20″ B) 43°48′13″ C) 44°48′15″ D) 42°42′12″ E) 43°42′23″

3. $\alpha = 23°\ 27'$ olmak üzere $\beta = 180 - 4\alpha$ olduğuna göre β açısı aşağıdakilerden hangisidir?

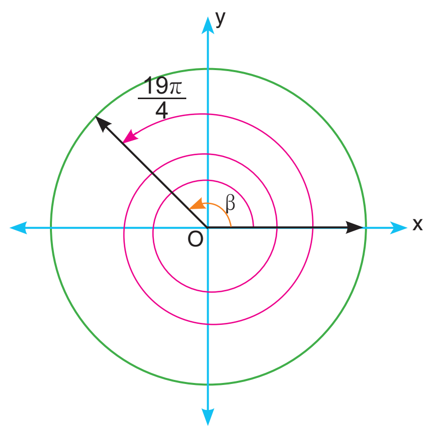
A) 84°12′ B) 85°12′ C) 86°12′ D) 87°12′ E) 88°12′

4. Aşağıdaki açıların esas ölçülerini bulunuz.

a) 138° **b)** 517° **c)** 4640° **ç)** $-88°$

d) $-1740°$ **e)** $\frac{7\pi}{6}$ radyan **f)** $\frac{38\pi}{5}$ radyan **g)** $-\frac{9\pi}{7}$ radyan

5. Yanda birim çemberde $\frac{19\pi}{4}$ açısı verilmiştir. $0 \leqslant \beta < 2\pi$ olduğuna göre β açısını bulunuz.



6. Aşağıda sol sütunda derece olarak verilen açıların radyan cinsinden değerlerini bulup sağ sütundaki doğru sonuç ile eşleştiriniz.

Derece	Radyan
a) 45°	**I.** $\frac{\pi}{4}$ radyan
	II. $\frac{5\pi}{4}$ radyan
b) 135°	**III.** $\frac{25\pi}{18}$ radyan
c) 150°	**IV.** $\frac{49\pi}{36}$ radyan
ç) 245°	**V.** $\frac{3\pi}{4}$ radyan
	VI. $\frac{5\pi}{6}$ radyan

7. Aşağıdaki açıları derece cinsinden bulunuz.

a) $\frac{\pi}{8}$ radyan **b)** $\frac{3\pi}{2}$ radyan **c)** $\frac{4\pi}{5}$ radyan **ç)** $\frac{7\pi}{2}$ radyan **d)** $\frac{12\pi}{5}$ radyan

8. Aşağıdaki cümlelerin başındaki kutucuğa, cümle doğru ise "D", yanlış ise "Y" yazınız.

a) ☐ Esas ölçü her zaman 360°den küçüktür.

b) ☐ Merkezi orijinde olan çembere birim çember denir.

c) ☐ $\frac{4\pi}{3}$ ün esas ölçüsü 120°dir.

ç) ☐ $-20°$ nin esas ölçüsü 160°dir.

d) ☐ Dünya'nın eksen eğikliği 12° 25′ lık açıdan 6° 02′ fazladır.

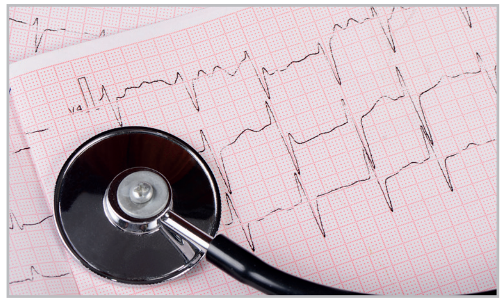
e) ☐ 360′ lık açı 21600″ dir.

f) ☐ Trigonometrik çember üzerindeki her noktanın orijine uzaklığı 1 br'dir.

9. $m(\widehat{A}) = 37°16'20''$ ve $m(\widehat{B}) = 23°36'50''$ ise $m(\widehat{A}) - m(\widehat{B})$ sonucunu bulunuz.

1.2. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

Kalp grafiği (EKG), su dalgaları, yayın salınımı ve ses dalgalarının hareketleri birer trigonometrik fonksiyon belirtir. Bu hareketler sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının grafiğindeki gibi ilerlemektedir.



1.2.1. Trigonometrik Fonksiyonlar ve Grafikleri

Kosinüs ve Sinüs Fonksiyonları

Bilgi

Birim çember üzerinde $P(x, y)$ noktası ile eşlenen açı, $m(\widehat{AOP}) = \theta$ olsun. P noktasının apsisine, θ **gerçek sayısının kosinüsü** denir ve $\cos\theta$ ile gösterilir.

P noktasının ordinatına ise θ **gerçek sayısının sinüsü** denir ve $\sin\theta$ ile gösterilir.

x eksenine **kosinüs ekseni**, y eksenine **sinüs ekseni** denir.

$A(1,0)$ olduğundan $\cos 0° = 1$

$\sin 0° = 0$

$B(0,1)$ olduğundan $\cos 90° = 0$

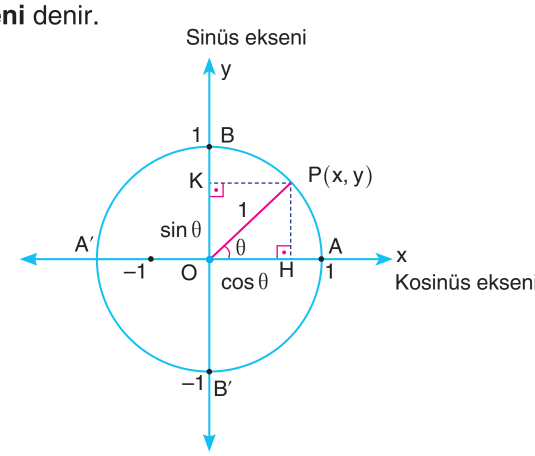
$\sin 90° = 1$

$A'(-1,0)$ olduğundan $\cos 180° = -1$

$\sin 180° = 0$

$B'(0,-1)$ olduğundan $\cos 270° = 0$

$\sin 270° = -1$'dir.



Bilgi

a) Bir x gerçek sayısını $\cos x$ e dönüştüren fonksiyona **kosinüs fonksiyonu** denir.

$f: \mathbb{R} \to [-1, 1],\ f(x) = \cos x$ şeklinde yazılır.

b) Bir x gerçek sayısını $\sin x$ e dönüştüren fonksiyona **sinüs fonksiyonu** denir.

$f: \mathbb{R} \to [-1, 1],\ f(x) = \sin x$ şeklinde yazılır.

Kosinüs ve sinüs fonksiyonlarının görüntü kümesi $[-1, 1]$ dır.

$P(x, y)$ birim çember üzerinde bir nokta ise $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ve $-1 \leqslant y \leqslant 1$ olur.

Buradan $\forall \theta \in \mathbb{R}$ için $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ ve $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ olur.

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere ölçüsü θ ve $\theta + k \cdot 2\pi$ olan açıların birim çember üzerinde bitim kolları aynıdır.

Bu durumda $\cos(\theta + k \cdot 2\pi) = \cos\theta$

$\sin(\theta + k \cdot 2\pi) = \sin\theta$ olur.

Yandaki şekilde POH dik üçgeninde Pisagor teoreminden

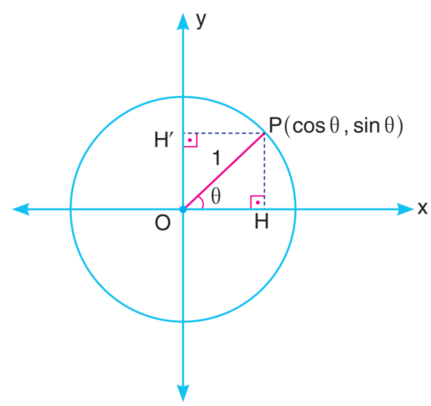
$$\left.\begin{array}{l} |OH| = \cos\theta \\ |PH| = \sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow |OH|^2 + |HP|^2 = 1^2$$

$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1 \Rightarrow \mathbf{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$ elde edilir.

Burada $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \Rightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{1 - \sin^2\theta}$ ve

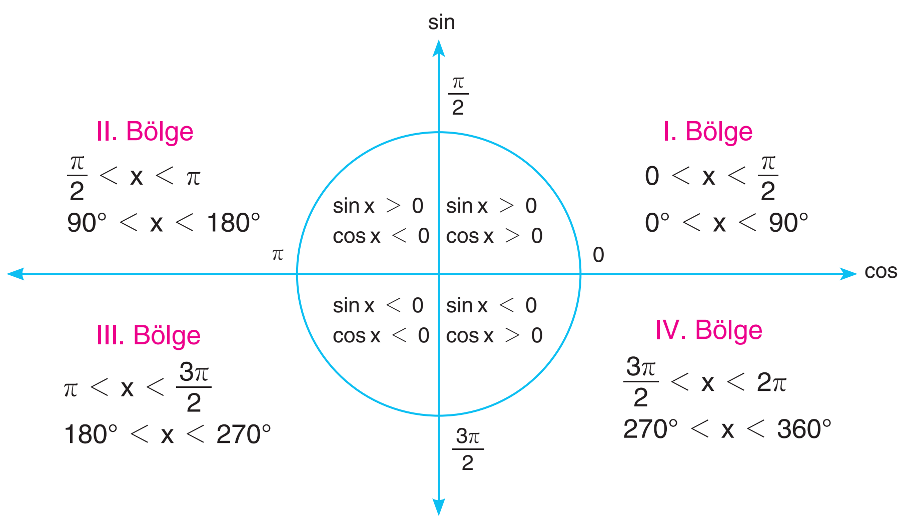
$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \Rightarrow \sin\theta = \mp\sqrt{1 - \cos^2\theta}$

eşitlikleri yazılabilir.



Analitik düzlemde, birim çemberdeki bölgelere göre sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının işaretleri aşağıdaki gibidir.

E-İçerik



Örnek

$4\cos x + 5\sin y$ ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük değerleri bulalım.

Çözüm

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ ve $\forall y \in \mathbb{R}$ için $-1 \leqslant \sin y \leqslant 1$ olur.

O hâlde

$$\begin{array}{rl} -4 \leqslant 4\cos x \leqslant 4 & \text{(Eşitsizliği 4 ile genişlettik.)} \\ + \; -5 \leqslant 5\sin y \leqslant 5 & \text{(Eşitsizliği 5 ile genişlettik.)} \\ \hline -9 \leqslant 4\cos x + 5\sin y \leqslant 9 & \text{Buradan} \end{array}$$

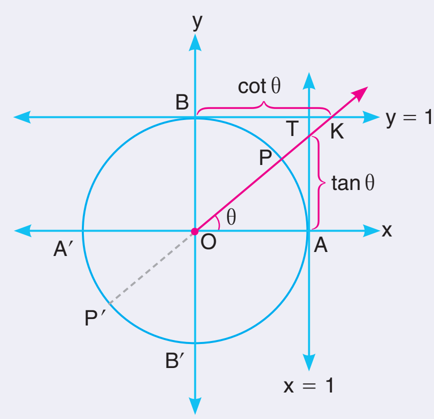
$4\cos x + 5\sin y$ ifadesinin alabileceği en büyük değer 9, en küçük değer −9 bulunur.

Tanjant ve Kotanjant Fonksiyonları

Bilgi

Birim çember üzerinde P noktası ile eşlenen açı $m(\widehat{AOP}) = \theta$ olsun. $[OP$ nın $x = 1$ doğrusunu kestiği T noktasının ordinatına, θ **açısının tanjantı** denir ve $\tan\theta$ ile gösterilir. $[OP$ nın $y = 1$ doğrusunu kestiği K noktasının apsisine, θ **açısının kotanjantı** denir ve $\cot\theta$ ile gösterilir.

$x = 1$ doğrusuna tanjant, $y = 1$ doğrusuna kotanjant ekseni denir.



$\theta = 0°$ olduğunda P ile A çakışır.

Bu durumda $|AT| = 0$ olacağından $\tan\theta = 0$ olur.

$\theta = \frac{\pi}{2}$ olduğunda P ile B çakışır.

Bu durumda $[OP$ ile $x = 1$ doğrusu paralel olduğundan kesişmez. $\tan\frac{\pi}{2}$ tanımsız olur.

$\theta = \pi$ olduğunda P ile A′ çakışır. $[OP$ nı üzerinde taşıyan doğrunun $x = 1$ doğrusunu kestiği nokta, yine A olur ve $\tan\pi = 0$ dır. P noktası B′ ile çakıştığında $\theta = \frac{3\pi}{2}$ dir. Bu durumda $[OP$, $x = 1$ doğrusu ile paralel olduğundan kesişmez. $\tan\frac{3\pi}{2}$ tanımsız olur.

θ açısı 0° ve 180° iken $y = 1$ doğrusu $[OP$ ile paralel olduğundan kesişmez. $\cot 0°$ ve $\cot 180°$ tanımsız olur. θ açısı 90° ve 270° iken $[OP$ ile $y = 1$ doğrusu B de kesiştiğinden $\cot 90° = 0$ ve $\cot 270° = 0$ olur.

a) Tanım kümesi, $\mathbb{R} - \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ olan ve tanım kümesindeki her bir x gerçek sayısını $\tan x$ e eşleyen fonksiyona, **tanjant fonksiyonu** denir ve bu fonksiyon **tan x** ile gösterilir.

$$f : \mathbb{R} - \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \tan x \text{ olur.}$$

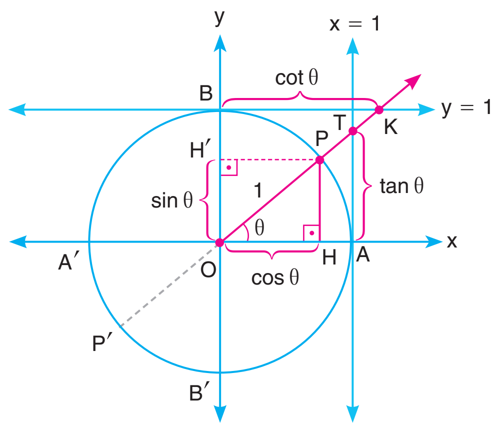
b) Tanım kümesi, $\mathbb{R} - \{x : x = k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ olan ve tanım kümesindeki her bir x elemanını $\cot x$ e dönüştüren fonksiyona, **kotanjant fonksiyonu** denir ve **cot x** ile gösterilir.

$$f : \mathbb{R} - \{x : x = k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cot x \text{ olur.}$$

Örnek

Bir açının tanjant ve kotanjant değerlerini, sinüs ve kosinüs değerleri türünden ifade edelim.

Çözüm



Yandaki şekilde

$|OH| = \cos\theta$

$|OH'| = |PH| = \sin\theta$

$|AT| = \tan\theta$

$|BK| = \cot\theta$

$|OA| = 1$ olur.

$$\widehat{OHP} \sim \widehat{OAT} \Rightarrow \frac{|OH|}{|OA|} = \frac{|HP|}{|AT|}$$

$$\frac{\cos\theta}{1} = \frac{\sin\theta}{\tan\theta} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\ (\cos\theta \neq 0) \quad \text{ve}$$

$$\widehat{OH'P} \sim \widehat{OBK} \Rightarrow \frac{|OH'|}{|OB|} = \frac{|H'P|}{|BK|} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{1} = \frac{\cos\theta}{\cot\theta}$$

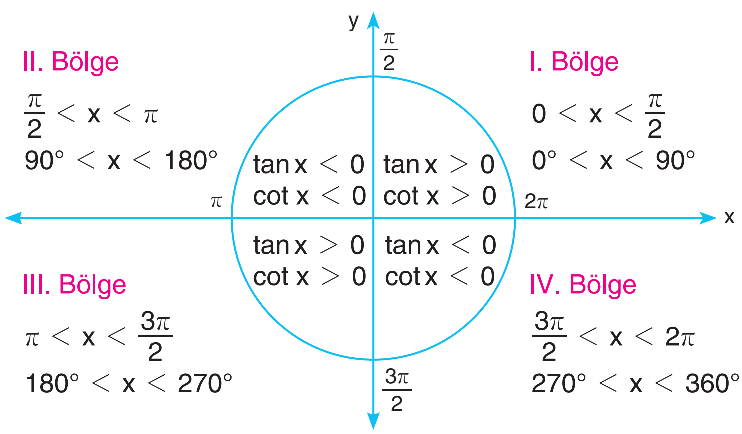
$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\ (\sin\theta \neq 0) \quad \text{olur.}$$

Sonuç

1. $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}, (\cos\theta \neq 0)$
2. $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}, (\sin\theta \neq 0)$
3. $\tan\theta \cdot \cot\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = 1$ olduğundan $\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$ olur.
4. $\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$ ise $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$ veya $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ yazılabilir.

Yanda, analitik düzlemdeki birim çemberin ayırdığı dört bölgeye göre tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının işaretleri verilmiştir.

Tanjant ve kotanjant fonksiyonları I ve III. bölgede pozitif, II ve IV. bölgede negatif değerler alır.



Örnek

Aşağıdaki trigonometrik ifadelerin en sade şekillerini bulalım.

a) $\cot x \cdot \sin x$ **b)** $\dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+\cot x}$ **c)** $\dfrac{\cos x}{1-\tan x}+\dfrac{\sin x}{1-\cot x}$ **ç)** $\sin^2 x\cdot(1+\cot^2 x)$

Çözüm

a) $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \cot x\cdot\sin x=\dfrac{\cos x}{\sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{1}=\cos x$ olur.

b)
$$\frac{1}{\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+\cot x}=\frac{1}{\underset{(\sin x)}{\dfrac{\sin x}{1+\cos x}}+\underset{(1+\cos x)}{\dfrac{\cos x}{\sin x}}}=\frac{1}{\dfrac{\sin^2 x+\cos x(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)}}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x+\cos x}{\sin x(1+\cos x)}}=\frac{1}{\dfrac{(1+\cos x)}{\sin x\cdot(1+\cos x)}} \qquad (\sin^2 x+\cos^2 x=1)$$

$$=\frac{1}{\dfrac{1}{\sin x}}=1\cdot\frac{\sin x}{1}=\sin x \quad \text{olur.}$$

c)
$$\frac{\cos x}{1-\tan x}+\frac{\sin x}{1-\cot x}=\frac{\cos x}{\underset{(\cos x)}{\dfrac{1}{1}}-\dfrac{\sin x}{\cos x}}+\frac{\sin x}{\underset{(\sin x)}{\dfrac{1}{1}}-\dfrac{\cos x}{\sin x}}=\frac{\cos x}{\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x}}+\frac{\sin x}{\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x}}$$

$$=\cos x\cdot\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}+\sin x\cdot\frac{\sin x}{\sin x-\cos x}$$

$$=\frac{\cos^2 x}{\cos x-\sin x}+\frac{\sin^2 x}{\sin x-\cos x}$$

$$=\frac{\cos^2 x}{\cos x-\sin x}-\frac{\sin^2 x}{\cos x-\sin x}$$

$$=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}=\frac{(\cos x-\sin x)\cdot(\cos x+\sin x)}{(\cos x-\sin x)}$$

$$=\cos x+\sin x \quad \text{olur.}$$

ç)
$$\sin^2 x\cdot(1+\cot^2 x)=\sin^2 x\cdot\left(1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)=\sin^2 x\cdot\left(\underset{(\sin^2 x)}{\frac{1}{1}}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$$

$$=\sin^2 x\cdot\left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$$

$$=\sin^2 x\cdot\left(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)=\sin^2 x\cdot\frac{1}{\sin^2 x}=1 \quad \text{bulunur.}$$

Örnek

Aşağıdaki trigonometrik değerlerin işaretlerini bulalım.

a) $\cos 412°$ **b)** $\tan 741°$ **c)** $\sin(-20°)$ **ç)** $\cot 940°$ **d)** $\cos 830°$

Çözüm

a) 412°lik açının esas ölçüsü, $412° = 52° + 1 \cdot 360°$ eşitliğinden 52°dir. $\cos 412° = \cos 52°$dir. $0° < 52° < 90°$ olduğundan 52° I. bölgededir. I. bölgede kosinüs pozitiftir. Bu nedenle $\cos 412°$nin işareti pozitiftir.

b) 741°lik açının esas ölçüsü, $741° = 21° + 2 \cdot 360°$ eşitliğinden 21° olur. $\tan 741° = \tan 21°$dir. $0° < 21° < 90°$ olduğundan 21° I. bölgededir I. bölgede tanjant pozitiftir. Bu nedenle $\tan 741°$ işareti pozitiftir.

c) $-20°$lik açının esas ölçüsü, $-20° = 340° + (-1) \cdot 360°$ eşitliğinden 340° olur. $\sin(-20°) = \sin 340°$ olur. $270° < 340° < 360°$ olduğundan 340° IV. bölgededir. IV. bölgede sinüs negatiftir. Bu nedenle $\sin(-20°)$'nin işareti negatiftir.

ç) 940°lik açının esas ölçüsü, $940° = 220° + 2 \cdot 360°$ eşitliğinden 220° olur. $\cot 940° = \cot 220°$dir. $180° < 220° < 270°$ olduğundan 220° III. bölgededir. III. bölgede kotanjant pozitiftir. Bu nedenle $\cot 940°$nin işareti pozitiftir.

d) 830°lik açının esas ölçüsü, $830° = 110° + 2 \cdot 360°$ eşitliğinden 110° olur. $\cos 830° = \cos 110°$ olur. $90° < 110° < 180°$ olduğundan 110° II. bölgededir. II. bölgede kosinüs negatiftir. Bu nedenle $\cos 830°$nin işareti negatiftir.

Sekant ve Kosekant Fonksiyonları

Bilgi

Birim çember üzerinde $m(\widehat{KOP}) = \theta$ olmak üzere çemberin P noktasındaki teğetinin koordinat eksenlerini kestiği noktalar, R ve S olsun.

R noktasının apsisine, θ **gerçek sayısının sekantı** denir ve **sec** θ ile gösterilir. S noktasının ordinatına, θ **gerçek sayısının kosekantı** denir ve **cosec** θ ile gösterilir.

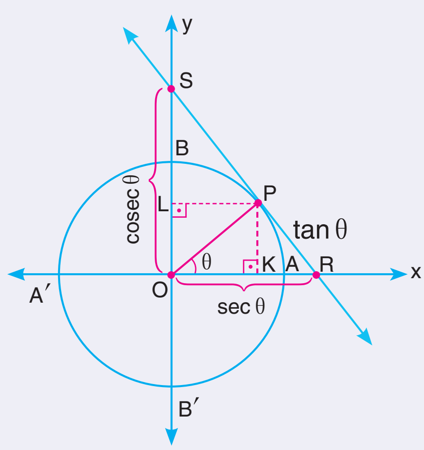
Tanım kümesi $\mathbb{R} - \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ olan ve tanım kümesindeki her bir x gerçek sayısını sec x e eşleyen fonksiyona **sekant fonsiyonu** denir ve bu fonksiyon **secx** ile gösterilir.

Tanım kümesi $\mathbb{R} - \{x : x = k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ olan ve tanım kümesindeki her bir x gerçek sayısını cosecx e eşleyen fonksiyona **kosekant fonsiyonu** denir ve bu fonksiyon **cosec x** ile gösterilir.

0° ve 180° için kosekant, 90° ve 270° için de sekant değerleri tanımsızdır.

$$f : \mathbb{R} - \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R} - (-1, 1) \quad f(x) = \sec x$$

$$f : \mathbb{R} - \{x : x = k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} - (-1, 1), \quad f(x) = \operatorname{cosec} x$$



Örnek

Bir açının sekant ve kosekant değerlerini sinüs ve kosinüs değerleri türünden ifade edelim.

Çözüm

P, teğet değme noktası olduğundan

$[OP] \perp [SR]$ olur. $m(\widehat{KOP}) = m(\widehat{ROP})$

$m(\widehat{OKP}) = m(\widehat{OPR})$ olduğundan

$\widehat{OPK} \sim \widehat{ORP}$ dir. Buradan

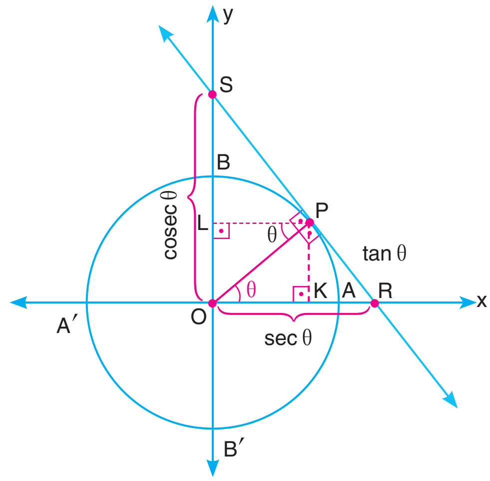
$$\frac{|OP|}{|OR|} = \frac{|OK|}{|OP|} \Rightarrow \frac{1}{\sec\theta} = \frac{\cos\theta}{1} \Rightarrow \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}\text{'dır.}$$

$m(\widehat{OPL}) = m(\widehat{OSP})$

$m(\widehat{OLP}) = m(\widehat{OPS}) = 90^\circ$ olduğundan

$\widehat{OPL} \sim \widehat{OSP}$ dir. Buradan

$$\frac{|OP|}{|OS|} = \frac{|OL|}{|OP|} \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} = \frac{\sin\theta}{1} \Rightarrow \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}\text{'dır.}$$



Sonuç

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ ve $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$'tir.

Örnek

Aşağıdaki trigonometrik ifadeleri en sade şekilde yazalım.

a) $\dfrac{\operatorname{cosec} x}{\cot x}$ **b)** $1 - \sec^2 x$ **c)** $1 - \operatorname{cosec}^2 x$ **ç)** $\dfrac{\operatorname{cosec}^2 x}{\cot x} - \cot x$ **d)** $\dfrac{\sin x}{\operatorname{cosec} x - \cot x}$

Çözüm

a) $$\frac{\operatorname{cosec} x}{\cot x} = \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

b) $$1 - \sec^2 x = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\underset{(\cos^2 x)}{1}} - \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x}$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= -\tan^2 x$$

c) $1-\operatorname{cosec}^2 x = 1-\dfrac{1}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{\underset{(\sin^2 x)}{1}} - \dfrac{1}{\sin^2 x} = \dfrac{\sin^2 x - 1}{\sin^2 x} = -\dfrac{(1-\sin^2 x)}{\sin^2 x}$

$$= -\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= -\cot^2 x$$

ç) $\dfrac{\operatorname{cosec}^2 x}{\cot x} - \cot x = \dfrac{\dfrac{1}{\sin^2 x}}{\dfrac{\cos x}{\sin x}} - \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$$= \dfrac{1}{\underset{\sin x}{\cancel{\sin^2} x}} \cdot \dfrac{\overset{1}{\cancel{\sin x}}}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \dfrac{1}{\underset{(1)}{\sin x \cdot \cos x}} - \dfrac{\cos x}{\underset{(\cos x)}{\sin x}}$$

$$= \dfrac{1}{\sin x \cdot \cos x} - \dfrac{\cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}$$

$$= \dfrac{1-\cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

d) $\dfrac{\sin x}{\operatorname{cosec} x - \cot x} = \dfrac{\sin x}{\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{\cos x}{\sin x}} = \dfrac{\sin x}{\dfrac{1-\cos x}{\sin x}} = \sin x \cdot \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

$$= \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \dfrac{1-\cos^2 x}{1-\cos x} = \dfrac{\cancel{(1-\cos x)} \cdot (1+\cos x)}{\cancel{1-\cos x}}$$

$= 1+\cos x$ bulunur.

Örnek

$\operatorname{cosec} x = a$ olmak üzere $1+\cot^2 x$ in a türünden eşitini bulalım.

Çözüm

$1+\cot^2 x = 1+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{\underset{(\sin^2 x)}{1}} + \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 x} + \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$

$$= \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \dfrac{1}{\sin^2 x}$$

$= \operatorname{cosec}^2 x$ olur.

$\operatorname{cosec} x = a$ olduğundan $1+\cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x = (\operatorname{cosec} x)^2 = a^2$ bulunur.

Örnek

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x - \sec^2 x + \tan^2 x}$$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x - \sec^2 x + \tan^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \frac{(-1 + \sin^2 x)}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \frac{-\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}}}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x - 1}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{-(1 - \cos^2 x)}$$

$$= \frac{\cancel{\sin^2 x}}{-\cancel{\sin^2 x}} = -1$$ bulunur.

Örnek

Aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösterelim.

a) $\frac{1 + \cot x}{1 + \tan x} = \cot x$

b) $\cos^4 x - \sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$

c) $\frac{1 - \cot^2 x}{1 + \cot^2 x} = \sin^2 x - \cos^2 x$

Çözüm

a) $$\frac{1 + \cot x}{1 + \tan x} = \frac{1 + \frac{\cos x}{\sin x}}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}}{\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}} = \frac{\cancel{(\sin x + \cos x)}}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\cancel{(\cos x + \sin x)}} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

b) $$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2 = \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{1}(\cos^2 x - \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x})$$

$$= 1 \cdot [\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)] = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

c) $$\frac{1 - \cot^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cancel{\sin^2 x}}}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cancel{\sin^2 x}}} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1}} = \sin^2 x - \cos^2 x$$

Bilgi

Fonksiyon	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi
$y = \sin x$	$\{x : -\infty < x < \infty\}$	$\{y : -1 \leqslant y \leqslant 1, y \in \mathbb{R}\}$
$y = \cos x$	$\{x : -\infty < x < \infty\}$	$\{y : -1 \leqslant y \leqslant 1, y \in \mathbb{R}\}$
$y = \tan x$	$\left\{x : -\infty < x < \infty, x \neq \frac{(2k+1)\cdot\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\{y : -\infty < y < \infty, y \in \mathbb{R}\}$
$y = \cot x$	$\{x : -\infty < x < \infty, x \neq k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{y : -\infty < y < \infty, y \in \mathbb{R}\}$
$y = \sec x$	$\left\{x : -\infty < x < \infty, x \neq \frac{(2k+1)\cdot\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\{y : y \geqslant 1, y \leqslant -1, y \in \mathbb{R}\}$
$y = \operatorname{cosec} x$	$\{x : -\infty < x < \infty, x \neq k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{y : y \geqslant 1, y \leqslant -1, y \in \mathbb{R}\}$

Örnek

$\frac{4\sin x - 5}{3}$ ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük tam sayı değerlerini bulalım.

Çözüm

$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

$-4 \leqslant 4\sin x \leqslant 4$

$-9 \leqslant 4\sin x - 5 \leqslant -1$

$-3 \leqslant \frac{4\sin x - 5}{3} \leqslant -\frac{1}{3}$

Burada $-\frac{1}{3}$ ten küçük en büyük tamsayı –1'dir.

Bu aralıkta $\frac{4\sin x - 5}{3}$'ün alabileceği en büyük tam sayı değeri -1, en küçük tam sayı değeri -3 bulunur.

Örnek

$0° < x < 90°$ ve $\sqrt{16 - 16\sin^2 x} + 3\cos x - 8\sin x = 0$ olduğuna göre $\cot x$ değerini bulalım.

Çözüm

$$\sqrt{16 - 16\sin^2 x} + 3\cos x - 8\sin x = 0$$

$$\sqrt{16(1 - \sin^2 x)} + 3\cos x - 8\sin x = 0$$

$$\sqrt{16 \cdot \cos^2 x} + 3\cos x - 8\sin x = 0$$

$$4 \cdot |\cos x| + 3\cos x - 8\sin x = 0$$

$$4\cos x + 3\cos x - 8\sin x = 0 \quad (0° < x < 90° \text{ iken } \cos x > 0\text{'dır.})$$

$$7\cos x - 8\sin x = 0$$

$$7\cos x = 8\sin x \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{8}{7} \Rightarrow \cot x = \frac{8}{7} \text{ bulunur.}$$

Örnek

Aşağıdaki trigonometrik değerleri küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

a) $a = \sin 24°$
$b = \sin 46°$
$c = \sin 94°$
$d = \sin 175°$

b) $a = \sin 26°$
$b = \cos 26°$
$c = \cot 26°$

Çözüm

a) İstenen trigonometrik oranların değerleri, yandaki şekilde siyah çizgilerle gösterilmiştir.

$\sin 175° = \sin 5°$ ve $\sin 94° = \sin 86°$ olur.

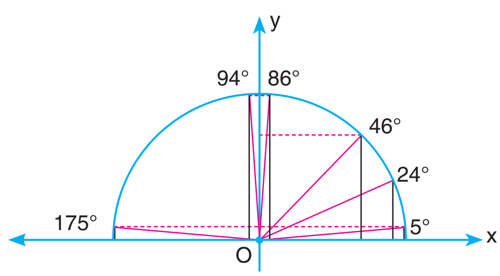
I. bölgede açılar büyüdükçe sinüs değerleri de büyür.

$\sin 5° < \sin 24° < \sin 46° < \sin 86°$

Buradan

$\sin 175° < \sin 24° < \sin 46° < \sin 94°$

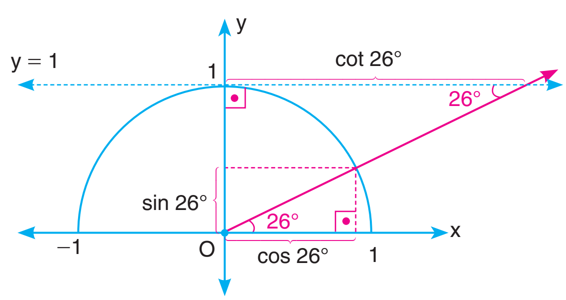
$\Rightarrow d < a < b < c$ bulunur.



b) Birim çember üzerinde görüldüğü gibi

$\sin 26° < \cos 26° < \cot 26°$

$\Rightarrow a < b < c$ bulunur.

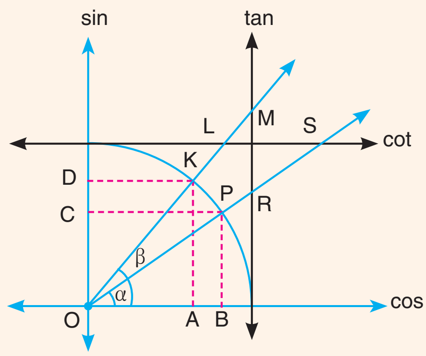


Analitik düzlemin I. bölgesinde açı değerleri arttıkça sinüs ve tanjant fonksiyonları artan değerler, kosinüs ve kotanjant fonksiyonları azalan değerler alır.

$\beta > \alpha$ iken $|KA| > |PB|$ olduğundan

$\sin\beta > \sin\alpha, \ \tan\beta > \tan\alpha$

$\cos\beta < \cos\alpha, \ \cot\beta < \cot\alpha$ olur.



Örnek

$a = \sin 20°, \ b = \cos 20°, \ c = \tan 160°, \ d = \cot 160°$ olduğuna göre a, b, c ve d'yi küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

Çözüm

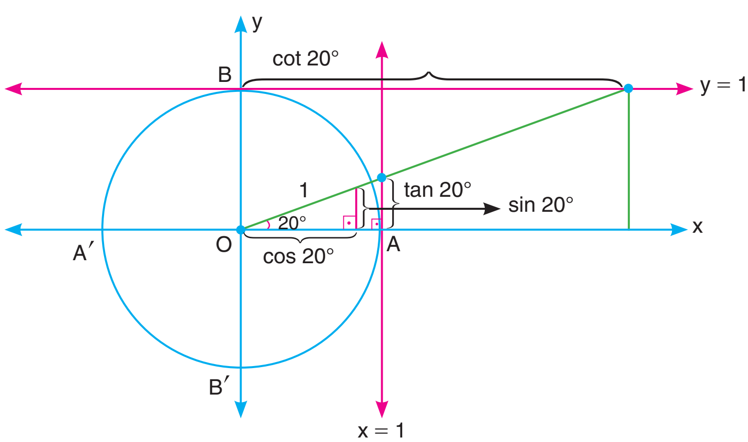
$$\left.\begin{array}{l} c = \tan 160° = -\tan 20° \\ d = \cot 160° = -\cot 20° \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} \cot 20° > \tan 20° \\ -\cot 20° < -\tan 20° \end{array}$$

$d < c$ olur.

$\sin 20° < \cos 20°$

$a < b$ olur.

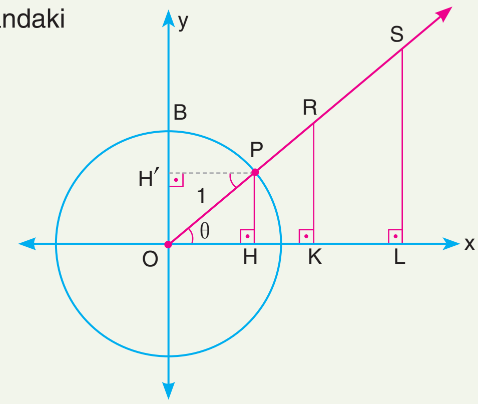
Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi $d < c < a < b$ bulunur.



Dik Üçgende Dar Açıların Trigonometrik Oranları

Hatırlatma

Ölçüsü 0° ile 90° arasında olan açılara **dar açı** denir. Yandaki şekilde θ açısının bitim kolu, $[OP$ dır.



$|OP| = 1,\ |OH| = \cos\theta,\ |PH| = \sin\theta$ dır.

$\widehat{OHP} \sim \widehat{OKR} \sim \widehat{OLS} \sim$ ... (A.A. benzerlik kuralı)

$\dfrac{|OH|}{|OP|} = \dfrac{|OK|}{|OR|} = \dfrac{|OL|}{|OS|}$ olduğundan

$\dfrac{\cos\theta}{1} = \dfrac{|OK|}{|OR|} = \dfrac{|OL|}{|OS|}$ olur.

Bu oran tüm benzer dik üçgenlerde geçerli olduğundan

$\cos\theta = \dfrac{\text{Komşu dik kenarın uzunluğu}}{\text{Hipotenüsün uzunluğu}}$ elde edilir.

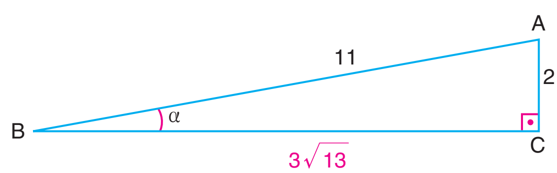
Benzer şekilde, $|PH| = |OH'| = \sin\theta = \dfrac{|PH|}{|PO|} = \dfrac{\text{Karşı dik kenarın uzunluğu}}{\text{Hipotenüsün uzunluğu}}$ olur.

Örnek

$0° < \alpha < 90°$ olmak üzere $\sin\alpha = \dfrac{2}{11}$ olduğuna göre $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$ değerini bulalım.

Çözüm

$\sin\alpha = \dfrac{2}{11}$ oranına uygun dik üçgen yandaki gibi olur.



$\widehat{ABC}$ nde Pisagor teoremini uygulayalım.

$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$

$11^2 = |BC|^2 + 2^2$

$121 = |BC|^2 + 4$

$|BC|^2 = 121 - 4$

$|BC|^2 = 117 \Rightarrow |BC| = 3\sqrt{13}$ olur.

$\cos\alpha = \dfrac{|BC|}{|AB|} = \dfrac{3\sqrt{13}}{11}$ olur.

Buradan $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \left(\dfrac{|AC|}{|AB|}\right)^2 - \left(\dfrac{|BC|}{|AB|}\right)^2 = \left(\dfrac{2}{11}\right)^2 - \left(\dfrac{3\sqrt{13}}{11}\right)^2$

$= \dfrac{4}{121} - \dfrac{117}{121} = -\dfrac{113}{121}$ bulunur.

Bilgi

Yandaki şekilde $|OP| = 1, |AT| = \tan\theta$ dır.

$\overset{\frown}{OAT} \sim \overset{\frown}{OBU} \sim \overset{\frown}{OCV} \sim$ ... olur. (A.A. benzerlik kuralı)

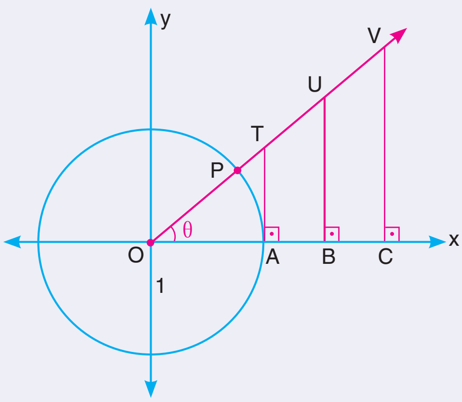
$$\frac{|AT|}{|OA|} = \frac{|BU|}{|OB|} = \frac{|CV|}{|OC|} \text{ olur.}$$

Benzerlikten, $|AT| = \tan\theta$ ve $|OA| = 1$'den

$$\tan\theta = \frac{|BU|}{|OB|} = \frac{|CV|}{|OC|} \text{ olur. Buradan,}$$

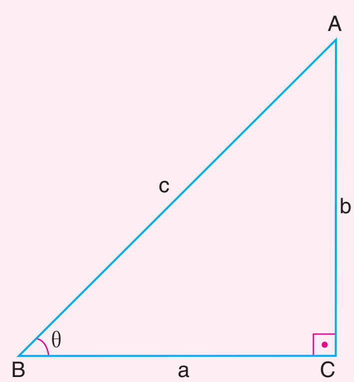
$$\tan\theta = \frac{\text{Karşı dik kenarın uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenarın uzunluğu}} \text{ elde edilir.}$$

Benzer şekilde, $\cot\theta = \dfrac{\text{Komşu dik kenarın uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenarın uzunluğu}}$ olur.



Sonuç

ABC dik üçgen, $0° < \theta < 90°$ olsun.



1. $\sin\theta = \dfrac{b}{c}$, $\cos\theta = \dfrac{a}{c}$

$\tan\theta = \dfrac{b}{a}$, $\cot\theta = \dfrac{a}{b}$

$\sec\theta = \dfrac{c}{a}$, $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{c}{b}$ olur.

2. $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow m(\widehat{A}) = \dfrac{\pi}{2} - m(\widehat{B})$ olur.

$$\sin\widehat{B} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{B}\right) = \cos\widehat{A} = \frac{b}{c}$$

$$\cos\widehat{B} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{B}\right) = \sin\widehat{A} = \frac{a}{c}$$

$$\tan\widehat{B} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{B}\right) = \cot\widehat{A} = \frac{b}{a}$$

$$\cot\widehat{B} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{B}\right) = \tan\widehat{A} = \frac{a}{b}$$

$$\sec\widehat{B} = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{B}\right) = \operatorname{cosec}\widehat{A} = \frac{c}{a}$$

$$\operatorname{cosec}\widehat{B} = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{B}\right) = \sec\widehat{A} = \frac{c}{b} \text{ olur.}$$

Ölçüleri toplamı 90° olan (tümler açılar) iki açıdan birinin sinüsü, diğerinin kosinüsüne; birinin tanjantı, diğerinin kotanjantına; birinin sekantı, diğerinin kosekantına eşittir.

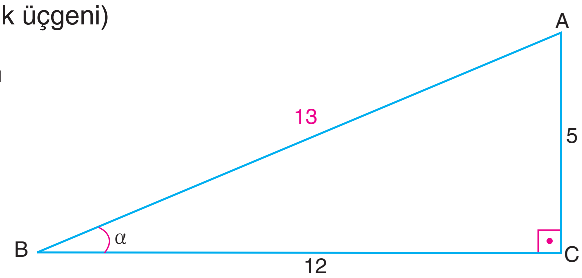
Örnek

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ve $\tan\alpha = \dfrac{5}{12}$ olmak üzere $\cos\alpha - \cot\alpha + \dfrac{1}{\sin\alpha}$'nın değerini bulalım.

Çözüm

$\tan\alpha = \dfrac{5}{12}$ oranına uygun dik üçgen yandaki gibi olur.

$\widehat{ABC}$ nde $|AB| = 13$ br olur. (5 - 12 - 13 özel dik üçgeni)



$$\cos\alpha - \cot\alpha + \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{|BC|}{|AB|} - \frac{|BC|}{|AC|} + \left(\frac{|AC|}{|AB|}\right)^{-1}$$

$$= \underset{(5)}{\frac{12}{13}} - \underset{(13)}{\frac{12}{5}} + \underset{(13)}{\frac{13}{5}}$$

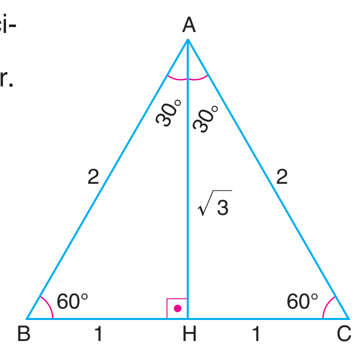
$$= \frac{60}{65} - \frac{156}{65} + \frac{169}{65}$$

$$= \frac{60 - 156 + 169}{65}$$

$$= \frac{73}{65} \text{ bulunur.}$$

30° ve 60° lik Açıların Trigonometrik Oranları

Yandaki ABC eşkenar üçgeninde $|AB| = 2$ br alınıp $[AH] \perp [BC]$ çizilirse $|AH| = \sqrt{3}$ br $|BH| = |HC| = 1$ br, $m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{CAH}) = 30^\circ$ olur.



AHB dik üçgeninde,

$$\sin 30^\circ = \frac{|BH|}{|AB|} = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{|AH|}{|AB|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

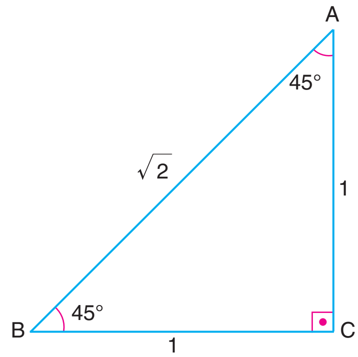
$$\tan 30^\circ = \frac{|BH|}{|AH|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \cot 30^\circ = \frac{|AH|}{|BH|} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{|AH|}{|AB|} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{|BH|}{|AB|} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{|AH|}{|BH|} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}, \quad \cot 60^\circ = \frac{|BH|}{|AH|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{bulunur.}$$

45° lik Açının Trigonometrik Oranları

Yandaki ABC ikizkenar dik üçgeninde $|AC| = |BC| = 1$ br alınırsa $|AB| = \sqrt{2}$ br olur.



ABC dik üçgeninde B açısının trigonometrik oranlarını bulalım.

$$\left.\begin{aligned} \sin 45^\circ &= \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 45^\circ &= \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \tan 45^\circ &= \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{1}{1} = 1 \\ \cot 45^\circ &= \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}\right\} \tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1 \text{ bulunur.}$$

Bilgi

Aşağıdaki tabloda özel açıların trigonometrik oranları verilmiştir.

Ölçüsü 0° ile 360° (0 radyan ile 2π radyan) olan açılar birim çember üzerinde çakışık olduğundan bunların trigonometrik oranları birbirine eşittir.

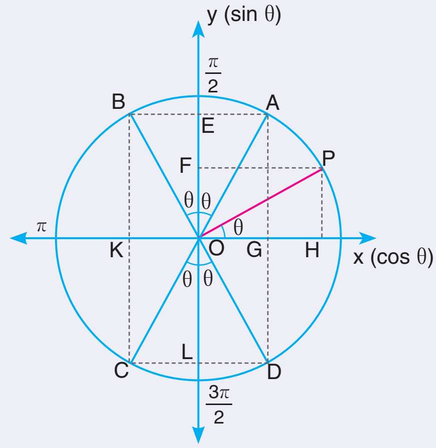
θ(derece)	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
θ(radyan)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Tanımsız	0	Tanımsız	0
$\cot\theta$	Tanımsız	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Tanımsız	0	Tanımsız

$\frac{k\pi}{2} \pm \theta$ $(k \in \mathbb{Z})$ Sayılarının θ Dar Açısı Türünden Trigonometrik Oranları

$\frac{k\pi}{2} \pm \theta$ ifadesinde k = 1 yazılırsa $\frac{\pi}{2} \pm \theta$, k = 3 yazılırsa $\frac{3\pi}{2} \pm \theta$ elde edilir.

Bilgi

Yandaki O merkezli birim çemberde



$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$ ($\widehat{POH} \cong \widehat{AOE}$ olduğundan $|OE| = |OH|$)

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$ ($\widehat{POH} \cong \widehat{AOE}$ olduğundan $|OG| = |OF|$)

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$ $\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta\right)$

$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$ $\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$ ($\widehat{POH} \cong \widehat{BOE}$ olduğundan $|OE| = |OH|$)

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$ ($\widehat{POH} \cong \widehat{BOE}$ olduğundan $|PH| = |BE|$)

$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta$ $\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta\right)$

$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\tan\theta$ $\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta\right)$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta$ ($\widehat{POH} \cong \widehat{COL}$ olduğundan $|OL| = |OH|$)

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$ ($\widehat{POH} \cong \widehat{COL}$ olduğundan $|OK| = |OF|$)

$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$ $\left(\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{-\cos\theta}{-\sin\theta} = \cot\theta\right)$

$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$ $\left(\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{-\sin\theta}{-\cos\theta} = \tan\theta\right)$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\theta$ ($\widehat{POH} \cong \widehat{DOL}$ olduğundan $|OL| = |OH|$)

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \sin\theta$ ($\widehat{POH} \cong \widehat{DOL}$ olduğundan $|OG| = |OF|$)

$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta$ $\left(\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta} = -\cot\theta\right)$

$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\tan\theta$ $\left(\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{\sin\theta}{-\cos\theta} = -\tan\theta\right)$

Örnek

Ölçüsü 120° olan açının trigonometrik oranlarını bulalım.

Çözüm

120° dik koordinat sisteminde II. bölgededir.

120° = 90° + 30° şeklinde yazabiliriz.

$$\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \tan(90^\circ + 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cot 120^\circ = \cot(90^\circ + 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Örnek

Aşağıdaki açıların trigonometrik oranlarını bulalım.

a) 210° **b)** $\frac{3\pi}{4}$ radyan **c)** $\frac{19\pi}{6}$ radyan **ç)** $\frac{11\pi}{6}$ radyan

Çözüm

a) 210° = 270° − 60° şeklinde yazılabilir.

$$\sin 210^\circ = \sin(270^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 210^\circ = \cos(270^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 210^\circ = \tan(270^\circ - 60^\circ) = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 210^\circ = \cot(270^\circ - 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

b) $\sin \frac{3\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \frac{3\pi}{4} = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\cot \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\cot \frac{3\pi}{4} = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

c) Burada $\frac{19\pi}{6}$ nın esas ölçüsü $\frac{7\pi}{6}$'dır.

$$\sin \frac{19\pi}{6} = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{19\pi}{6} = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{19\pi}{6} = \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot \frac{19\pi}{6} = \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

ç) $\sin \frac{11\pi}{6} = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

$$\cos \frac{11\pi}{6} = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{11\pi}{6} = \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\cot \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot \frac{11\pi}{6} = \cot\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

Örnek

$\sin 33° = a$ olmak üzere $\dfrac{2\cos 123° - \sin^2 33°}{\cos^2 237° + \dfrac{\sin^2 33° + \sin^2 57°}{\sin^2 33°}}$ ifadesinin a türünden eşitini bulalım.

Çözüm

$$\frac{2\cos 123° - \sin^2 33°}{\cos^2 237° + \dfrac{\sin^2 33° + \sin^2 57°}{\sin^2 33°}} = \frac{2\cos(90° + 33°) - \sin^2 33°}{\cos^2(270° - 33°) + \dfrac{\sin^2 33° + \cos^2 33°}{\sin^2 33°}}$$

$$= \frac{-2\cdot\sin 33° - \sin^2 33°}{-\sin^2 33° + \dfrac{1}{\sin^2 33°}} = \frac{-2a - a^2}{-a^2 + \dfrac{1}{a^2}} = \frac{-2a - a^2}{\dfrac{1 - a^4}{a^2}} = \frac{-2a^3 - a^4}{1 - a^4}$$

$\dfrac{k\pi}{2} \pm \theta$ ifadesinde $k = 2$ yazılırsa $\pi \pm \theta$, $k = 4$ yazılırsa $2\pi \pm \theta$ elde edilir.

Buradan $\pi \pm \theta$ ve $2\pi \pm \theta$ biçimindeki açıların θ dar açısı cinsinden eşitleri aşağıdaki gibi olur.

Bilgi

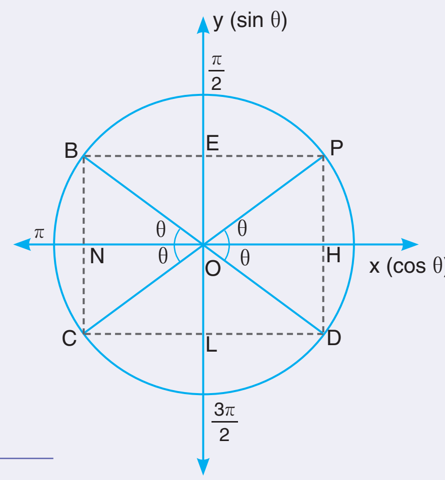
Yandaki O merkezli birim çemberde

$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ $\quad (\widehat{POH} \cong \widehat{BON}$ olduğundan $|PH| = |BN|)$

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ $\quad (\widehat{POH} \cong \widehat{BON}$ olduğundan $|OH| = |ON|)$

$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$ $\quad \left(\dfrac{\sin(\pi - \theta)}{\cos(\pi - \theta)} = \dfrac{\sin\theta}{-\cos\theta} = -\tan\theta\right)$

$\cot(\pi - \theta) = -\cot\theta$ $\quad \left(\dfrac{\cos(\pi - \theta)}{\sin(\pi - \theta)} = \dfrac{-\cos\theta}{\sin\theta} = -\cot\theta\right)$



$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$ $\quad (\widehat{POH} \cong \widehat{CNO}$ olduğundan $|CN| = |PH| = |OL|)$

$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$ $\quad (\widehat{POH} \cong \widehat{CNO}$ olduğundan $|ON| = |OH|)$

$\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$ $\quad \left(\dfrac{\sin(\pi + \theta)}{\cos(\pi + \theta)} = \dfrac{-\sin\theta}{-\cos\theta} = \tan\theta\right)$

$\cot(\pi + \theta) = \cot\theta$ $\quad \left(\dfrac{\cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi + \theta)} = \dfrac{-\cos\theta}{-\sin\theta} = \cot\theta\right)$

$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$ ($\widehat{POH}\cong\widehat{DOH}$ olduğundan $|PH|=|HD|=|EO|=|OL|$)

$\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$ ($\widehat{POH}\cong\widehat{DOH}$ olduğundan $|OH|=|OH|$)

$$\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta\left(\frac{\sin(2\pi-\theta)}{\cos(2\pi-\theta)}=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta\right)$$

$$\cot(2\pi-\theta)=-\cot\theta\left(\frac{\cos(2\pi-\theta)}{\sin(2\pi-\theta)}=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\cot\theta\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin(2\pi+\theta)&=\sin\theta\\ \cos(2\pi+\theta)&=\cos\theta\\ \tan(2\pi+\theta)&=\tan\theta\\ \cot(2\pi+\theta)&=\cot\theta\end{aligned}\right\}\text{Birim çemberde } 2\pi+\theta=\theta \text{ olduğundan}$$

Sonuç

Ölçüleri $2\pi-\theta$ ve $-\theta$ olan açılar, birim çember üzerinde aynı noktayı gösterdiklerinden

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\quad$ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\quad$ $\cot(-\theta)=-\cot\theta$ olur.

Örnek

Aşağıdaki açıların trigonometrik oranlarını bulalım.

a) $\frac{5\pi}{6}$ radyan **b)** $240°$ **c)** $\frac{7\pi}{4}$ radyan **ç)** $-30°$

Çözüm

a) $\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$\cos\frac{5\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{5\pi}{6}=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cot\frac{5\pi}{6}=\cot\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cot\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3}$

b) $\sin 240°=\sin(180°+60°)=-\sin 60°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 240°=\cos(180°+60°)=-\cos 60°=-\frac{1}{2}$

$\tan 240°=\tan(180°+60°)=\tan 60°=\sqrt{3}$

$\cot 240°=\cot(180°+60°)=\cot 60°=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\sin\frac{7\pi}{4}=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{7\pi}{4}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\frac{7\pi}{4}=\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

$\cot\frac{7\pi}{4}=\cot\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cot\frac{\pi}{4}=-1$

ç) $\sin(-30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$

$\cos(-30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan(-30^\circ)=-\tan 30^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cot(-30^\circ)=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}$ bulunur.

Örnek

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)-\cos(3\pi-\theta)$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)-\cos(3\pi-\theta)&=-\cos\theta-\cos[2\pi+(\pi-\theta)]\\&=-\cos\theta-\cos(\pi-\theta)\\&=-\cos\theta-(-\cos\theta)\\&=-\cos\theta+\cos\theta\\&=0\end{aligned}$$ bulunur.

Örnek

$\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)-\cos(\theta-2\pi)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cot(\pi-\theta)}$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$\cos(\theta-2\pi)=\cos[-(2\pi-\theta)]=\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$ olur.

$$\begin{aligned}\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)-\cos(\theta-2\pi)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cot(\pi-\theta)}&=\frac{-\cos\theta-\cos\theta}{-\cot\theta-\cot\theta}=\frac{-2\cdot\cos\theta}{-2\cdot\cot\theta}=\cos\theta\cdot\frac{1}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}\\&=\cos\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\\&=\sin\theta\end{aligned}$$ bulunur.

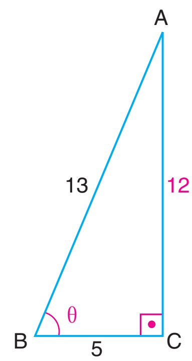
Örnek

$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ve $\cos\theta = \frac{5}{13}$ olduğuna göre $\cot\theta$ değerini bulalım.

Çözüm

ABC dik üçgeninde $m(\widehat{B}) = \theta$ alalım.

$\cos\theta = \frac{5}{13}$ tür. Bu nedenle ölçüsü θ olan açının komşu dik kenar uzunluğu 5 br ve hipotenüs uzunluğu 13 br olur.



ABC dik üçgeninde $|AC| = 12$ br olur (5-12-13 özel dik üçgeni).

$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ olduğundan θ açısı IV. bölgededir. IV. bölgede kotanjant fonksiyonunun işareti negatiftir.

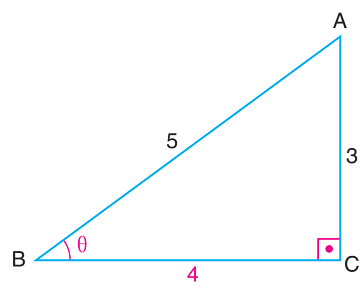
Buradan $\cot\theta = -\frac{|BC|}{|AC|} = -\frac{5}{12}$ bulunur.

Örnek

$\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ olmak üzere $\sin\theta = \frac{3}{5}$'tir. Buna göre $\cos\theta + \frac{1}{\text{cosec}\,\theta}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$\sin\theta = \frac{3}{5}$ oranına uygun dik üçgen yandaki gibi olur.



ABC dik üçgeninde $|BC| = 4$ br olur (3-4-5 özel dik üçgeni).

$\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ olduğundan θ açısı II. bölgededir. II. bölgede kosinüs fonksiyonunun işareti negatif, sinüs fonksiyonunun işareti pozitiftir.

Buradan

$$\cos\theta + \frac{1}{\text{cosec}\,\theta} = \cos\theta + \frac{1}{\frac{1}{\sin\theta}} = \cos\theta + \sin\theta = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = -\frac{1}{5}$$

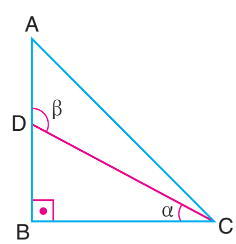
bulunur.

Örnek

ABC dik üçgeninde A, D, B doğrusal noktalar,

$m(\widehat{CDA}) = \beta, m(\widehat{BCD}) = \alpha$ ve $\sin\beta = \frac{15}{17}$ olduğuna göre

$\cos\alpha + \cot\alpha$ değerini bulalım.



Çözüm

$\widehat{DBC}$ nde $m(\widehat{BDC}) = 180° - \beta = \pi - \beta$ olur.

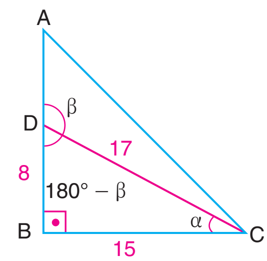
O hâlde $\sin\beta = \sin(180° - \beta) = \frac{15}{17}$'dir.

$|BC| = 15$ br, $|DC| = 17$ br alınırsa $|BD| = 8$ br olur.

(8-15-17 özel dik üçgeni)

Buradan

$$\cos\alpha + \cot\alpha = \underset{(8)}{\frac{15}{17}} + \underset{(17)}{\frac{15}{8}} = \frac{120}{136} + \frac{255}{136} = \frac{375}{136} \text{ bulunur.}$$



Örnek

Dar açılı $\widehat{ABC}$ nin iç açıları A, B ve C'dir. $\frac{\tan(2\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C})}{\sin(2\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C})} = -\frac{\sqrt{13}}{3}$ olduğuna göre $\sin\widehat{A} - \cos\widehat{A}$ ifadesinin değerini bulalım.

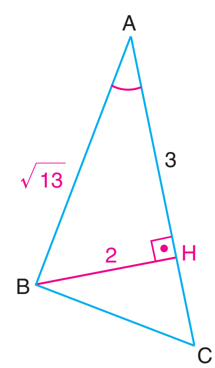
Çözüm

A, B ve C $\widehat{ABC}$ nin iç açıları olduğundan $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180°$dir.

$$\frac{\tan(2\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C})}{\sin(2\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C})} = \frac{\tan((\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) + \widehat{A})}{\sin((\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) + \widehat{A})} = \frac{\tan(180° + \widehat{A})}{\sin(180° + \widehat{A})} = \frac{\tan\widehat{A}}{-\sin\widehat{A}}$$

$$= \frac{\frac{\sin\widehat{A}}{\cos\widehat{A}}}{-\sin\widehat{A}}$$

$$= -\frac{1}{\cos\widehat{A}} \text{ olur.}$$



$\frac{\tan(2\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C})}{\sin(2\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C})} = -\frac{\sqrt{13}}{3}$ olduğundan $-\frac{1}{\cos\widehat{A}} = -\frac{\sqrt{13}}{3} \Rightarrow \cos\widehat{A} = \frac{3}{\sqrt{13}}$ bulunur.

$\cos\widehat{A} = \frac{3}{\sqrt{13}}$ oranına uygun üçgen yukarıdaki gibi olur.

ABH dik üçgeninde Pisagor teoremini uygulayalım.

$$|AB|^2 = |AH|^2 + |BH|^2$$

$$(\sqrt{13})^2 = 3^2 + |BH|^2$$

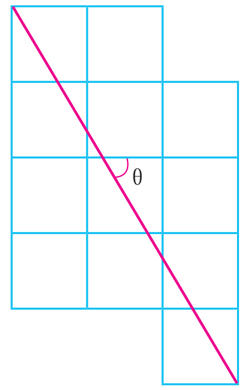
$$13 = 9 + |BH|^2$$

$$|BH|^2 = 4$$

$|BH| = 2$ olur. $\sin\widehat{A} = \frac{|BH|}{|AB|} = \frac{2}{\sqrt{13}}$ olduğundan

$$\sin\widehat{A} - \cos\widehat{A} = \frac{2}{\sqrt{13}} - \frac{3}{\sqrt{13}} = -\frac{1}{\sqrt{13}} \text{ bulunur.}$$

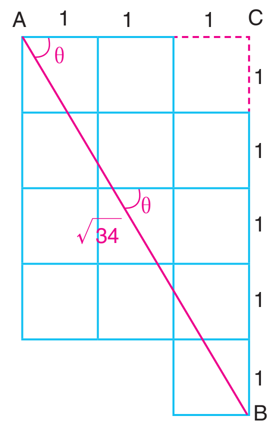
Örnek



Yandaki şekil, 12 birim kareden oluşmuştur.

Buna göre $\dfrac{\tan\theta + \cot\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm



Şekli üçgene tamamlarsak $\widehat{ABC}$ oluşur.

$|AC| = 3$ br, $|BC| = 5$ br olur.

ABC dik üçgeninde Pisagor teoremini uygulayalım.

$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$

$|AB| = \sqrt{34}$ olur. $m(\widehat{BAC}) = \theta$ olur (yöndeş açılar).

Buradan $\dfrac{\tan\theta + \cot\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = \dfrac{\dfrac{5}{3} + \dfrac{3}{5}}{\dfrac{5}{\sqrt{34}} - \dfrac{3}{\sqrt{34}}} = \dfrac{\dfrac{25}{15} + \dfrac{9}{15}}{\dfrac{2}{\sqrt{34}}} = \dfrac{34}{15} \cdot \dfrac{\sqrt{34}}{2}$

$= \dfrac{17\sqrt{34}}{15}$ bulunur.

Örnek

Ay, Dünya'nın etrafında döndüğü için bir ay boyunca değişik fazlarda görünmektedir. t faz açısı ve f Ay'ın faz görünümü fonksiyonu olmak üzere Ay'ın faz görünümü $f(t) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos t)$ formülü ile hesaplanır.



Buna göre aşağıdaki t açısına göre Ay'ın fazlarını bulalım.

a) $t = 0$ **b)** $t = \dfrac{\pi}{2}$ **c)** $t = \pi$ **ç)** $t = \dfrac{3\pi}{2}$

Çözüm

$f(t)=\frac{1}{2}(1-\cos t)$ ise

a) $t=0$ için $f(0)=\frac{1}{2}(1-\cos 0)=\frac{1}{2}(1-1)=0$ olduğundan Dünya'dan Ay'ın yüzü görünmez. Bu da "Ay'ın yeni ay evresi" olarak adlandırılır.

b) $t=\frac{\pi}{2}$ için $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}$ olduğundan Dünya'dan Ay'ın yarısı görünür. Bu da "Ay'ın ilk dördün evresi" olarak adlandırılır.

c) $t=\pi$ için $f(\pi)=\frac{1}{2}(1-\cos\pi)=\frac{1}{2}(1-(-1))=\frac{1}{2}\cdot 2=1$ olduğundan Dünya, Güneş ile Ay arasındadır. Dünya'dan Ay'ın tamamı görünür. Bu da "Ay'ın dolunay evresi" olarak adlandırılır.

ç) $t=\frac{3\pi}{2}$ için $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}$ olduğundan Dünya'dan Ay'ın yarısı görünür. Bu da "Ay'ın son dördün evresi" olarak adlandırılır.

Alıştırmalar 1-2

1. $x\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\frac{5\sin x-3}{4}$ ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük tam sayı değerlerini bulunuz.

2. $\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}-\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}-\cos x$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

3. $\frac{\sin^2 x+\cos x\cdot\tan x}{1+\sin x}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

4. $\operatorname{cosec}^2 x\cdot\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{\cot x}{\sin x}\right)$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

5. $\frac{1-\sec^2 x}{1+\cos x}:\frac{1}{\cos^2 x}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

6. $\frac{\sec(-x)}{\tan x+\cot x}=-\sin(-x)$ olduğunu gösteriniz.

7. $a=\sin 80°,\ b=\cos 105°,\ c=\tan 195°,\ d=\cot 275°$ olduğuna göre a, b, c ve d nin işaretlerini bulunuz.

8. $a=\sin 65°,\ b=\cos 65°,\ c=\cot 15°,\ d=\tan 65°$ olduğuna göre a, b, c ve d yi küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

9. $\sin 120°+\cos 150°-\tan 135°$ işleminin sonucunu bulunuz.

10. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ ve $\cos\theta=-\frac{4}{5}$ olduğuna göre $\sin\theta, \tan\theta$ ve $\cot\theta$ değerlerini bulunuz.

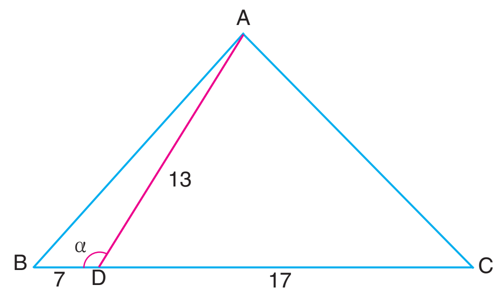
11. $\dfrac{\sin 315°}{\tan 135°}+\dfrac{\cot 300°}{\cos 300°}$ işleminin sonucunu bulunuz.

12. $\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ ve $\cot\theta = \dfrac{1}{3}$ olduğuna göre $\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$ işleminin sonucunu bulunuz.

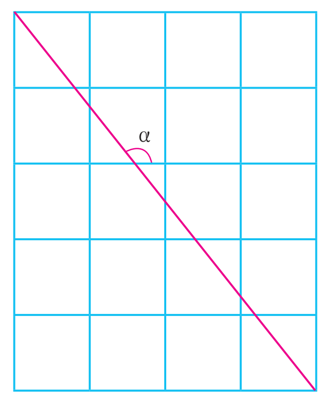
13. Yandaki $\widehat{ABC}$ nde $D \in [BC]$,

$|AB| = |AC|$, $|BD| = 7$ cm,

$|DC| = 17$ cm, $|AD| = 13$ cm, $m(\widehat{BDA}) = \alpha$ olduğuna göre $\cot\alpha$ değerini bulunuz.



14. Yandaki şekil 20 eş kareden oluşmuştur. Verilenlere göre $\tan\alpha$ değerini bulunuz.

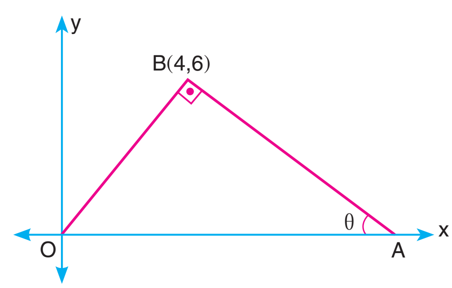


15. Aşağıdaki trigonometrik değerleri bulunuz.

a) $\sin 210°$ **b)** $\cos 420°$ **c)** $\tan\dfrac{5\pi}{6}$ **ç)** $\cot\dfrac{11\pi}{3}$

16. Yandaki dik koordinat sisiteminde OAB üçgen, $[OB] \perp [BA]$ ve B noktasının koordinatları $B(4, 6)$ dır.

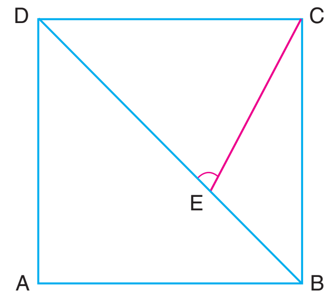
$m(\widehat{OAB}) = \theta$ ise $\sin\theta$ nın değerini bulunuz.



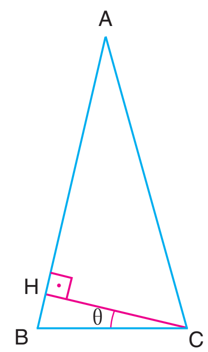
17. Yandaki ABCD karesinde D, E, B doğrusal noktalar,

$3|DE| = 7|EB|$ ise

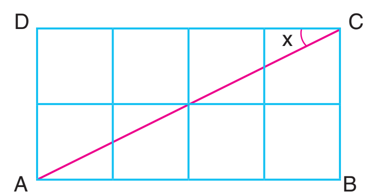
$\tan(\widehat{DEC})$ nın değerini bulunuz.



18. Yandaki $\widehat{ABC}$ nde $[AB] \perp [CH]$, $|AB| = |AC| = 4$ br ve $|BC| = 2$ br, $m(\widehat{HCB}) = \theta$ ise $\sin\theta$ nın değerini bulunuz.

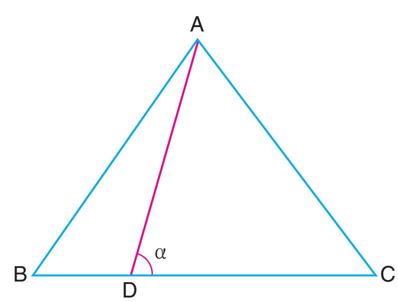


19. Yandaki dikdörtgen sekiz eş kareden oluştuğuna göre $\sin x \cdot \tan x$ in değerini bulunuz.

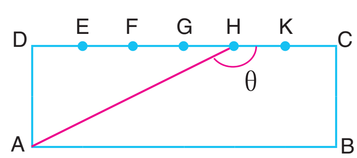


20. Yandaki ABC eşkenar üçgeninde $D \in [BC]$,

$5|BD| = 3|DC|$ ve $m(\widehat{ADC}) = \alpha$ olduğuna göre $\tan\alpha$ nın değerini bulunuz.



21. Yandaki ABCD dikdörtgeninde $[DC]$ kenarı 6 eş parçaya ayrılıyor. $3|AD| = |AB|$ ve $m(\widehat{AHC}) = \theta$ olduğuna göre $\tan\theta + \cot\theta$ ifadesinin değerini bulunuz.



1.2.2. Üçgende Kosinüs Teoremi

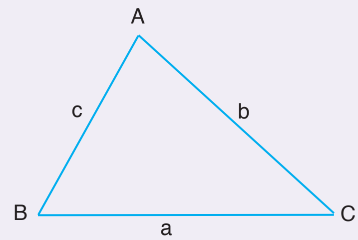
Özellik

Bir $\widehat{ABC}$ nde a, b ve c kenar uzunlukları olmak üzere

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A}$

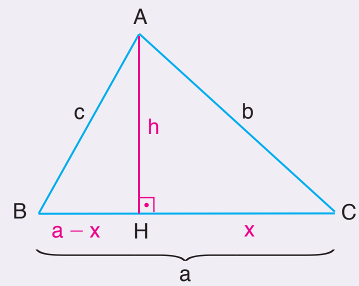
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\widehat{B}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\widehat{C}$ olur.



İspat: $\widehat{ABC}$ nde $[BC] \perp [AH]$ olacak şekilde $[AH]$ dikmesini çizelim.

$|AH| = h$, $|HC| = x$ dersek $|BH| = a - x$ olur.



$\widehat{ABH}$ nde Pisagor teoreminden

$h^2 = c^2 - (a-x)^2$

$h^2 = c^2 - a^2 + 2ax - x^2$ ... (I)

$\widehat{AHC}$ nde Pisagor teoreminden

$h^2 = b^2 - x^2$ dir. ... (II)

(I) ve (II) eşitliklerinden

$b^2 - \cancel{x^2} = c^2 - a^2 + 2ax - \cancel{x^2}$

$b^2 = c^2 - a^2 + 2ax$ elde edilir. ... (III)

$\widehat{AHB}$ nde $\cos\widehat{B} = \dfrac{a-x}{c} \Rightarrow x = -c \cdot \cos\widehat{B} + a$ olur. x değerini (III) eşitliğinde yerine yazalım.

$b^2 = c^2 - a^2 + 2a\left(-c\cos\widehat{B} + a\right)$

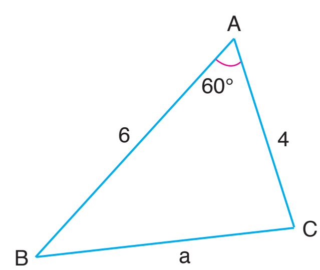
$b^2 = c^2 - a^2 - 2ac \cdot \cos\widehat{B} + 2a^2$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos\widehat{B}$ elde edilir. Siz de diğer kenarlar için kosinüs teoremini ispatlayınız.

Örnek

Bir $\widehat{ABC}$ nde b = 4 cm, c = 6 cm ve $m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$ olduğuna göre $[BC]$ kenarının uzunluğunu ve $\cos\widehat{B}$ değerini bulalım.

Çözüm



Kosinüs teoreminden $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A}$

$$a^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ$$

$$a^2 = 16 + 36 - 48 \cdot \frac{1}{2}$$

$$a^2 = 52 - 24$$

$$a^2 = 28$$

$a = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ cm olur.

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\widehat{B} \Rightarrow \cos\widehat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

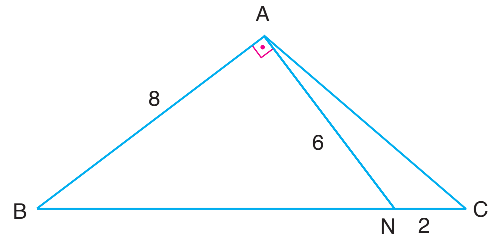
$\cos\widehat{B} = \dfrac{(2\sqrt{7})^2 + 36 - 16}{2 \cdot \sqrt{28} \cdot 6} = \dfrac{28 + 20}{24\sqrt{7}} = \dfrac{\overset{2}{\cancel{48}}}{\underset{1}{\cancel{24}}\sqrt{7}} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ bulunur.

Örnek

Yandaki $\widehat{ABC}$ nde $N \in [BC]$,

$|AB| = 8$ br, $|AN| = 6$ br, $|NC| = 2$ br ve

$[BA] \perp [NA]$ olduğuna göre $|AC|$ nu bulalım.

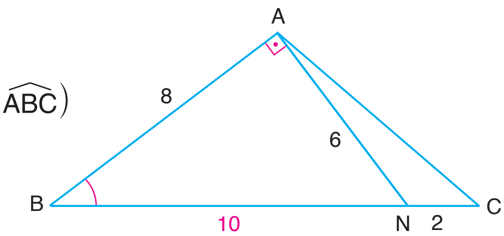


Çözüm

ABN dik üçgeninde $|BN| = 10$ cm olur (6-8-10 özel dik üçgeni). $|BC| = 10 + 2 = 12$ cm olur.

$\cos(\widehat{ABN}) = \dfrac{|AB|}{|BN|} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$ olur.

$\widehat{ABC}$ nde kosinüs teoreminden



$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos(\widehat{ABC})$$

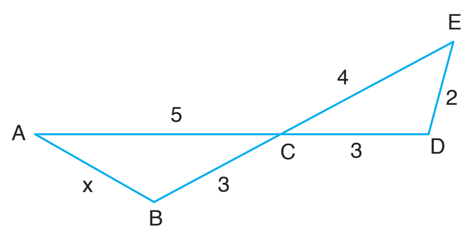
$$|AC|^2 = 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \frac{4}{5}$$

$$= 64 + 144 - \frac{768}{5}$$

$$= \frac{1040}{5} - \frac{768}{5} \Rightarrow |AC|^2 = \frac{272}{5} \Rightarrow |AC| = 4\sqrt{\frac{17}{5}} \text{ cm bulunur.}$$

Örnek

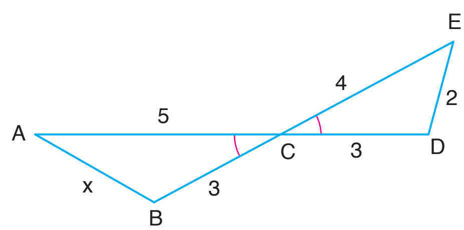
Yandaki şekilde $|AC| = 5$ br, $|CD| = 3$ br, $|CE| = 4$ br, $|ED| = 2$ br, $|BC| = 3$ br ve A, C, D ve B, C, E noktaları doğrusaldır. Buna göre $|AB| = x$ in kaç birim olduğunu bulalım.



Çözüm

$m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ECD})$ olur (ters açılar).

$\widehat{ECD}$ nde kosinüs teoreminden



$$|ED|^2 = |CD|^2 + |CE|^2 - 2 \cdot |CD| \cdot |CE| \cdot \cos(\widehat{ECD})$$

$$2^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos(\widehat{ECD})$$

$$4 = 9 + 16 - 24 \cdot \cos(\widehat{ECD})$$

$$\cos(\widehat{ECD}) = \frac{25-4}{24} = \frac{21}{24}$$

$$\cos(\widehat{ECD}) = \frac{7}{8} \text{ olur.}$$

$\widehat{ABC}$ nde kosinüs teoreminden

$$|AB|^2 = |CB|^2 + |CA|^2 - 2 \cdot |CB| \cdot |CA| \cdot \cos(\widehat{ACB})$$

$$x^2 = 3^2 + 5^2 - {}^{1}\cancel{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{7}{\cancel{8}_4}$$

$$= 9 + 25 - \frac{105}{4}$$

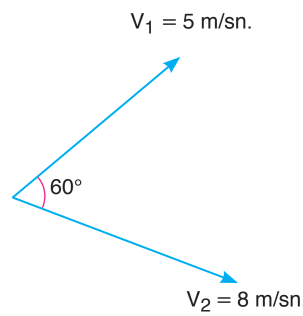
$$= 34 - \frac{105}{4}$$

$$= \frac{136 - 105}{4}$$

$$x^2 = \frac{31}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{31}}{2} \text{ cm bulunur.}$$

Örnek

İki hız motoru, aralarında 60° olacak şekilde aynı noktadan harekete başlıyor. Motorlardan biri 5 m/sn. hızla diğeri 8 m/sn. hızla hareket ediyor. 10 saniye sonunda aralarında kaç m uzaklık olacağını bulalım.

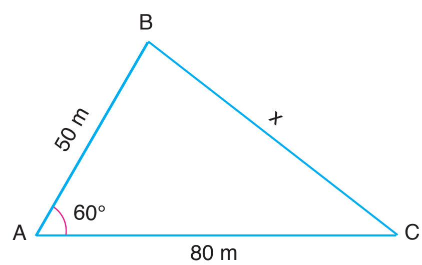


Çözüm

Hız motorlarının 10 sn. sonunda aldığı yolları bulalım.

$X_1 = V_1 \cdot t = 5 \cdot 10 = 50$ m ve $X_2 = V_2 \cdot t = 8 \cdot 10 = 80$ m'dir.

Bu problemi yandaki $\widehat{ABC}$ ile modelleyelim.



Hız motorlarının aralarındaki uzaklık $|BC|$ dur.

Kosinüs teoreminden

$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \cos \widehat{A}$$

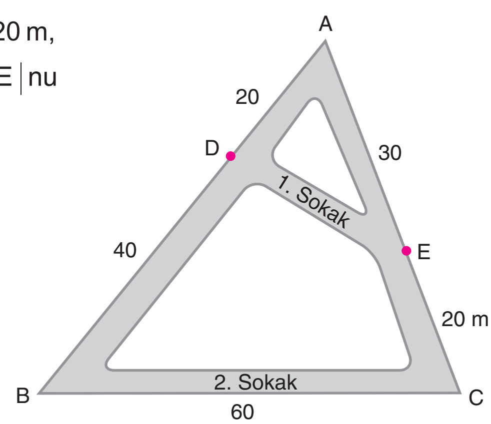
$$x^2 = 80^2 + 50^2 - 2 \cdot 80 \cdot 50 \cdot \cos 60°$$

$$x^2 = 6400 + 2500 - 8000 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2 = 4900 \Rightarrow |BC| = x = 70 \text{ m bulunur.}$$

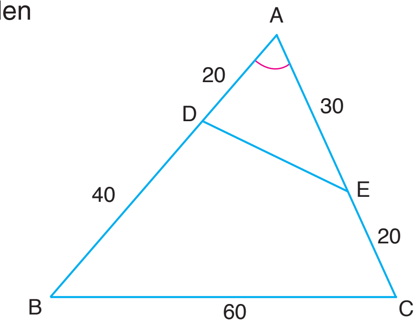
Örnek

Yanda bir mahallenin sokakları verilmiştir. $|AD| = 20$ m, $|DB| = 40$ m, $|AE| = 30$ m, $|EC| = 20$ m olduğuna göre $|DE|$nu bulalım.



Çözüm

Verilenleri $\widehat{ABC}$ ile modelleyelim. $\widehat{ABC}$ nde kosinüs teoreminden



$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|AC|\cdot\cos\widehat{A}$$

$$60^2 = 60^2 + 50^2 - 2\cdot 60\cdot 50\cdot\cos\widehat{A}$$

$$\cancel{3600} = \cancel{3600} + 2500 - 6000\cdot\cos\widehat{A}$$

$$\cos\widehat{A} = \frac{2500}{6000} = \frac{25}{60}$$

$$\cos\widehat{A} = \frac{5}{12} \text{ olur.}$$

$\widehat{ADE}$ nde kosinüs teoreminden

$$|DE|^2 = |AD|^2 + |AE|^2 - 2\cdot|AD|\cdot|AE|\cdot\cos\widehat{A}$$

$$= 20^2 + 30^2 - 2\cdot 20\cdot 30\cdot\frac{5}{12}$$

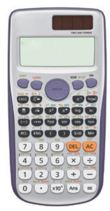
$$= 400 + 900 - 500$$

$$\sqrt{|DE|^2} = \sqrt{800}$$

$$|DE| = 20\sqrt{2} \approx 20\cdot 1{,}41$$

$$|DE| \approx 28{,}2 \text{ m bulunur.}$$

2 $\sqrt{\ }$ $\approx 1{,}41$



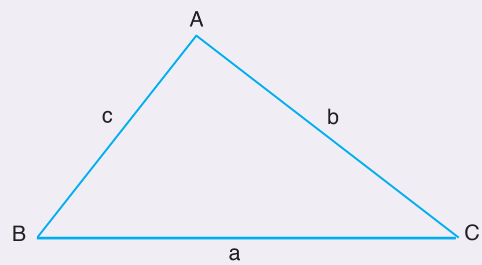
1.2.3. Üçgende Sinüs Teoremi

Özellik

Herhangi bir $\widehat{ABC}$ nin kenar uzunlukları a, b, c ve iç açıları $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ olmak üzere

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} \text{ olur.}$$

İspat



$$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\widehat{A} \text{ ... (I)}$$

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\widehat{B} \text{ ... (II)}$$

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\widehat{C} \text{ ... (III) olarak yazalım.}$$

(I) ve (II) eşitliklerinden

$$\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\cdot b\cdot\cancel{c}\cdot\sin\widehat{A} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\cdot a\cdot\cancel{c}\cdot\sin\widehat{B} \Rightarrow b\cdot\sin\widehat{A} = a\cdot\sin\widehat{B} \Rightarrow \frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} \text{ olur.}$$

(I) ve (III) eşitliklerinden

$$\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{b}\cdot c\cdot\sin\widehat{A} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\cdot a\cdot\cancel{b}\cdot\sin\widehat{C} \Rightarrow c\cdot\sin\widehat{A} = a\cdot\sin\widehat{C} \Rightarrow \frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} \text{ olur.}$$

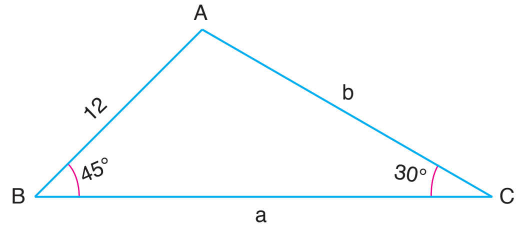
Buradan $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$ elde edilir.

Örnek

$\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{B}) = 45°$, $m(\widehat{C}) = 30°$ ve

$|AB| = 12$ cm olduğuna göre

$|BC|$ ve $|AC|$ nu bulalım.



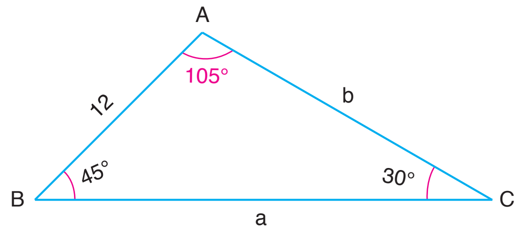
Çözüm

$\widehat{ABC}$ nin iç açılarının ölçüleri toplamından

$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180°$$

$$m(\widehat{A}) + 45° + 30° = 180° \Rightarrow m(\widehat{A}) = 180° - 75°$$

$$m(\widehat{A}) = 105° \text{ olur.}$$



Sinüs teoreminden

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} \Rightarrow \frac{a}{\sin 105°} = \frac{b}{\sin 45°} = \frac{12}{\sin 30°} \Rightarrow \frac{a}{0,9659} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{12}{\frac{1}{2}}$$



[105°] [sin] $\approx$ 0,9659 olur (hesap makinesinden sin 105°nin değeri).

$$\frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{12}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{2}.b = 12.\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = 12\sqrt{2} \approx 12 \cdot 1,41 \approx 16,92 \text{ cm olur.}$$

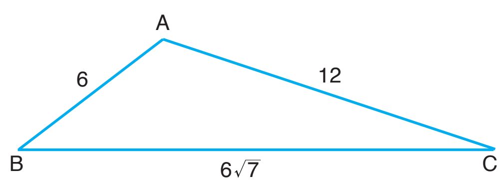
$$\frac{a}{0,9659} = \frac{12\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \frac{a}{0,9659} = 12\sqrt{2}.\frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow a \approx 24.0,9659 \Rightarrow a \approx 23,1816 \text{ cm bulunur.}$$

Örnek

Yandaki $\widehat{ABC}$ nde $|AB| = 6$ cm,

$|AC| = 12$ cm ve $|BC| = 6\sqrt{7}$ cm olduğuna göre

B ve C açılarının sinüs değerlerini bulalım.



Çözüm

$\overset{\frown}{ABC}$ nde kosinüs teoreminden

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A}$$

$$(6\sqrt{7})^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \cos\widehat{A}$$

$$\cos\widehat{A} = \frac{180 - 252}{144} = -\frac{72}{144} \Rightarrow \cos\widehat{A} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m(\widehat{A}) = 120^\circ \text{dir.}$$

Sinüs teoreminden

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} \Rightarrow \frac{6\sqrt{7}}{\sin 120^\circ} = \frac{12}{\sin\widehat{B}}$$

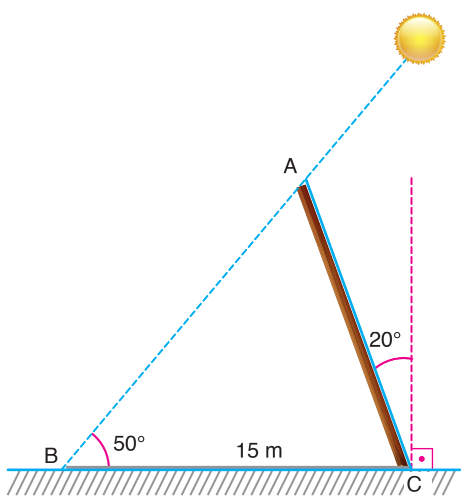
$$\frac{6\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{\sin\widehat{B}} \Rightarrow \sin\widehat{B} = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{6\sqrt{7}}$$

$$\sin\widehat{B} = \frac{\sqrt{21}}{7} \text{ olur.}$$

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} \Rightarrow \frac{6\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{\sin\widehat{C}} \Rightarrow \sin\widehat{C} = \frac{6\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{6\sqrt{7}} \Rightarrow \sin\widehat{C} = \frac{\sqrt{21}}{14} \text{ bulunur.}$$

Örnek

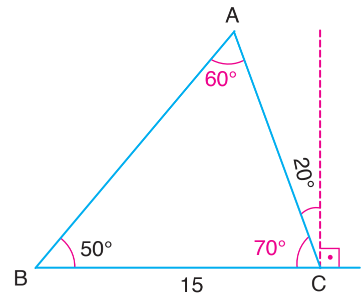
Aşağıdaki şekilde dikeyle 20°lik açı yapan bir direğin gölgesinin uzunluğu 15 m ve $m(\overset{\frown}{ABC}) = 50^\circ$ ölçülüyor. Buna göre direğin uzunluğunu bulalım.



Çözüm

Verilen şekli $\overset{\frown}{ABC}$ ile modelleyelim. $\overset{\frown}{ABC}$ nde

$$m(\widehat{A})+m(\widehat{B})+m(\widehat{C})=180^\circ$$
$$m(\widehat{A})+50^\circ+70^\circ=180^\circ$$
$$m(\widehat{A})=180^\circ-120^\circ$$
$$m(\widehat{A})=60^\circ \text{ olur.}$$



$\overset{\frown}{ABC}$ nde sinüs teoremini uygulayalım.

$$\frac{|BC|}{\sin\widehat{A}}=\frac{|AC|}{\sin\widehat{B}} \Rightarrow \frac{15}{\sin 60^\circ}=\frac{|AC|}{\sin 50^\circ}$$

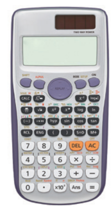
$$\frac{15}{0,86}=\frac{|AC|}{0,76}$$

$$|AC|=\frac{15\cdot 0,76}{0,86}$$

$$|AC|\approx 13,25 \text{ m olur.}$$

60° sin ≈ 0,86

50° sin ≈ 0,76



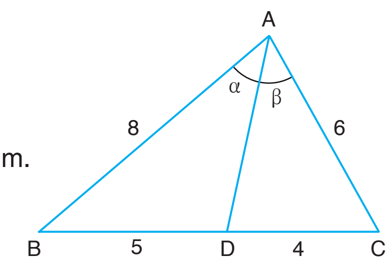
Buradan direğin boyu yaklaşık 13,25 m bulunur.

Örnek

Yandaki $\overset{\frown}{ABC}$ nde $D\in[BC]$, $|AB|=8$ cm,

$|AC|=6$ cm, $|DC|=4$ cm, $|BD|=5$ cm,

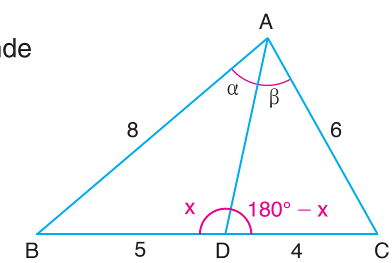
$m(\overset{\frown}{BAD})=\alpha$ ve $m(\overset{\frown}{DAC})=\beta$ olduğuna göre $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ oranını bulalım.



Çözüm

$\overset{\frown}{ABD}$ nde $m(\overset{\frown}{ADB})=x$ alırsak $m(\overset{\frown}{ADC})=180^\circ-x$ olur. $\overset{\frown}{ABD}$ nde sinüs teoreminden

$$\frac{|AB|}{\sin x}=\frac{|BD|}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{8}{\sin x}=\frac{5}{\sin\alpha} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{5\sin x}{8} \text{ olur.}$$



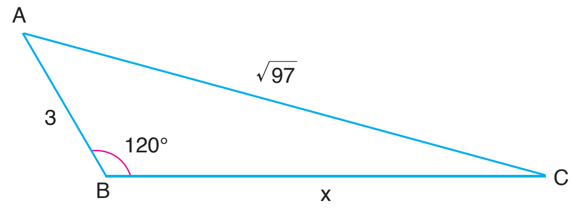
$\overset{\frown}{ADC}$ nde sinüs teoreminden

$$\frac{|AC|}{\sin(180^\circ-x)}=\frac{|DC|}{\sin\beta} \Rightarrow \frac{6}{\underbrace{\sin(180^\circ-x)}_{\sin x}}=\frac{4}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta=\frac{4\sin x}{6} \text{ olur.}$$

Buradan $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{\frac{5\sin x}{8}}{\frac{4\sin x}{6}}=\dfrac{5\,\cancel{\sin x}}{8}\cdot\dfrac{\cancel{6}^{3}}{{}_{2}\cancel{4}\,\cancel{\sin x}}=\dfrac{15}{16}$ bulunur.

Alıştırmalar 1-3

1. Yandaki $\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{ABC}) = 120^\circ$, $|AB| = 3$ cm ve $|AC| = \sqrt{97}$ cm olduğuna göre $|BC| = x$ kaç cm'dir?

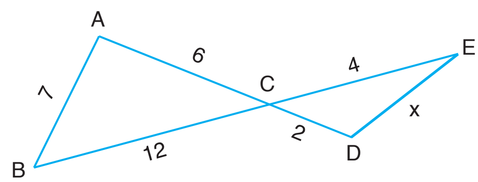


A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

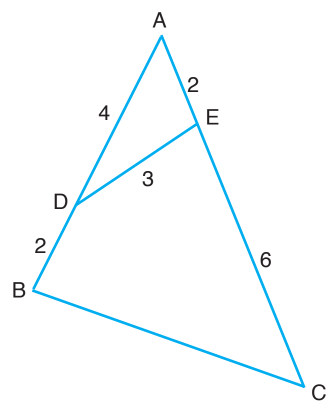
2. Bir $\widehat{ABC}$ nde $a = \sqrt{7}$ cm, $b = 2$ cm ve $c = 1$ cm olduğuna göre $m(\widehat{BAC}) = \alpha$ ve $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ olduğuna göre α kaç derecedir?

A) 30° B) 45° C) 60° D) 90° E) 120°

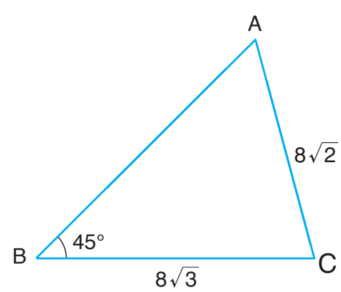
3. Yandaki şekilde $|AC| = 6$ br, $|CD| = 2$ br, $|AB| = 7$ br, $|BC| = 12$ br, $|CE| = 4$ br ve A, C, D ve B, C, E noktaları doğrusaldır. Buna göre $|DE|$ nu bulunuz.



4. Yandaki $\widehat{ABC}$ nde $D \in [AB]$, $E \in [AC]$, $|AE| = |BD| = 2$ cm, $|AD| = 4$ cm, $|DE| = 3$ cm ve $|CE| = 6$ cm olduğuna göre $|BC|$ nu bulunuz.

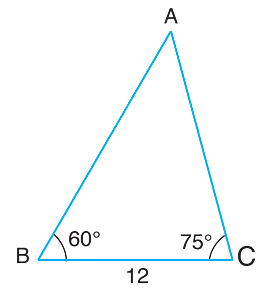


5. Yandaki $\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{ABC}) = 45^\circ$, $|AC| = 8\sqrt{2}$ cm ve $|BC| = 8\sqrt{3}$ cm olduğuna göre A açısının ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?

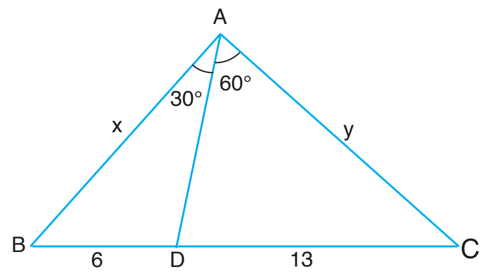


A) 15° B) 30° C) 45°
D) 60° E) 90°

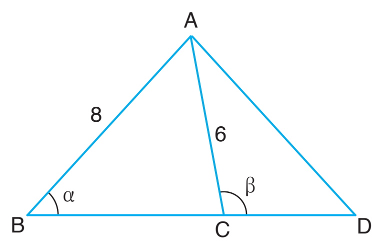
6. Yandaki $\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$, $m(\widehat{BCA}) = 75^\circ$ ve $|BC| = 12$ cm olduğuna göre $|AC|$ nu bulunuz.



7. Yandaki $\widehat{ABC}$ nde $D \in [BC]$, $m(\widehat{BAD}) = 30^\circ$, $m(\widehat{DAC}) = 60^\circ$, $|BD| = 6$ cm, $|DC| = 13$ cm, $|AB| = x$ ve $|AC| = y$ olduğuna göre $\frac{x}{y}$ oranını bulunuz.

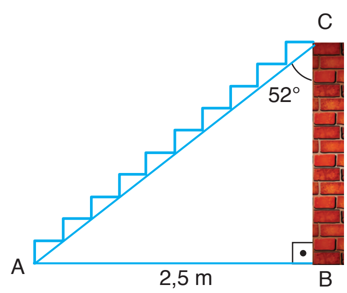


8. $\widehat{ABC}$ nde $C \in [BD]$, $|AB| = 8$ cm, $|AC| = 6$ cm, $m(\widehat{ABC}) = \alpha$, ve $m(\widehat{ACD}) = \beta$ olduğuna göre $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ oranını bulunuz.



9. $m(\widehat{ACB}) = 52^\circ$ olacak şekilde bir merdiven, duvara yandaki gibi konuluyor. Merdivenin ayağı ile duvarın arasındaki uzaklık 2,5 metredir. Buna göre merdivenin yaklaşık uzunluğunu bulunuz.

($\sin 52^\circ \approx 0,79$ alınız. Hesap makinesi kullanabilirsiniz.)

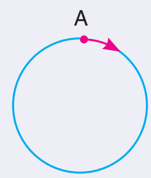


1.2.4. Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri

Periyot

Bilgi

Dairesel bir harekette nesnenin A noktasından başlayıp tekrar A noktasına gelmesi için gereken süreye **periyot** denir.



Örneğin Dünya, Güneş etrafındaki bir tam dönüşünü 365 gün 6 saatte tamamlar. Ay, Dünya etrafındaki bir tam dönüşünü yaklaşık 27 gün 8 saatte (27,3 gün) tamamlar. Bu olaylar hep aynı aralıklarla (periyodik olarak) meydana gelir.

Periyodik Fonksiyonlar

Bilgi

$f: A \to B$ fonksiyonu verilsin. $\forall x \in A$ için $f(x+T) = f(x)$ eşitliğini sağlayan en az bir $T \in \mathbb{R}^+$ varsa f fonksiyonuna periyodik fonksiyon, T sayısına da ***f* fonksiyonunun bir periyodu** denir.

Bu eşitliği sağlayan T sayılarından varsa en küçüğüne ***f* fonksiyonunun esas periyodu** denir. Bir fonksiyonun periyodu ifadesinden o fonksiyonun esas periyodu anlaşılacaktır.

$x \in [0, 6\pi]$ olmak üzere bazı açılar için $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ değerlerini bulalım.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π	$\frac{11\pi}{2}$	6π
sin x	0	1	0	−1	0	1	0	−1	0	1	0	−1	0
cos x	1	0	−1	0	1	0	−1	0	1	0	−1	0	1
tan x	0	Tanımsız	0	Tanımsız	0	Tanımsız	0	Tanımsız	0	Tanımsız	0	Tanımsız	0
cot x	Tanımsız	0	Tanımsız	0	Tanımsız	0	Tanımsız	0	Tanımsız	0	Tanımsız	0	Tanımsız

Yukarıdaki tabloda görüldüğü gibi $[0, 2\pi]$, $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$ aralığında sin x ve cos x, tekrarlanan yani periyodik değerler almıştır. $[0, \pi]$; $[\pi, 2\pi]$; $[4\pi, 5\pi]$ gibi aralıklarda ise tan x ve cot x tekrarlanan yani periyodik değerler almıştır.

Sonuç

Trigonometrik fonksiyonlar periyodik fonksiyonlardır.

Bilgi

$\forall x \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ için $\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x$

$\forall x \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ için $\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x$

olduğundan sinüs ve kosinüs fonksiyonları periyodik fonksiyonlardır. Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının periyotları $k \cdot 2\pi$ dir. $k = 1$ için esas periyotları, $T = 2\pi$ bulunur.

$k \in \mathbb{Z}^+$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ve $x \in \mathbb{R}$ için $\tan(x + k \cdot \pi) = \tan x$

$k \in \mathbb{Z}^+$, $x \neq k \cdot \pi$ ve $x \in \mathbb{R}$ için $\cot(x + k \cdot \pi) = \cot x$

olduğundan tanjant ve kotanjant fonksiyonları periyodik fonksiyonlardır. Tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının periyotları $k \cdot \pi$ dir. $k = 1$ için esas periyotları, $T = \pi$ bulunur.

Bundan sonraki anlatımlarda periyot denilince esas periyot anlaşılacaktır.

Bilgi

- $m, a, b \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, $a \neq 0$ için $f(x) = m \cdot \sin(ax + b)$ fonksiyonun periyodu $T = \frac{2\pi}{|a|}$ olur.
- $m, a, b \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, $a \neq 0$ için $f(x) = m \cdot \cos(ax + b)$ fonksiyonun periyodu $T = \frac{2\pi}{|a|}$ olur.
- $m, a, b \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, $a \neq 0$ için $f(x) = m \cdot \tan(ax + b)$ fonksiyonun periyodu $T = \frac{\pi}{|a|}$ olur.
- $m, a, b \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, $a \neq 0$ için $f(x) = m \cdot \cot(ax + b)$ fonksiyonun periyodu $T = \frac{\pi}{|a|}$ olur.

Örnek

Aşağıdaki fonksiyonların periyotlarını bulalım.

a) $f(x) = \sin(2x)$ **b)** $f(x) = \cos(-4x)$ **c)** $f(x) = \cot(4x)$ **ç)** $f(x) = -\tan(-3x)$

Çözüm

a) $f(x) = \sin(x)$ ise $T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ olur.

b) $f(x) = \cos(-4x)$ ise $T = \frac{2\pi}{|-4|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ olur.

c) $f(x) = \cot(4x)$ ise $T = \frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$ olur.

ç) $f(x) = -\tan(-3x)$ ise $T = \frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{|-3|} = \frac{\pi}{3}$ olur.

Örnek

Aşağıdaki fonksiyonların periyotlarını bulalım.

a) $f(x) = \sin(7x - 1)$ **b)** $f(x) = 2\cot(5x + 3)$ **c)** $f(x) = 7\cos(4x - 1)$

ç) $f(x) = 2\sin(-5x + 1)$ **d)** $f(x) = \tan(2x + 1)$ **e)** $f(x) = \tan(-3x - 4)$

Çözüm

a) $f(x) = \sin(7x - 1)$ ise $T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|7|} = \frac{2\pi}{7}$ olur.

b) $f(x) = 2\cot(5x + 3)$ ise $T = \frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{|5|} = \frac{\pi}{5}$ olur.

c) $f(x) = 7\cos(4x - 1)$ ise $T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$ olur.

ç) $f(x) = 2\sin(-5x + 1)$ ise $T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|-5|} = \frac{2\pi}{5}$ olur.

d) $f(x) = \tan(2x + 1)$ ise $T = \frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{|2|} = \frac{\pi}{2}$ olur.

e) $f(x) = \tan(-3x - 4)$ ise $T = \frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{|-3|} = \frac{\pi}{3}$ olur.

Örnek

$f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$ fonksiyonunun periyodu $\frac{2\pi}{7}$,

$g(x) = m \cdot \tan(nx + k)$ fonksiyonunun periyodu $\frac{\pi}{5}$ ise $b \cdot n$ nin pozitif değerini bulalım.

Çözüm

$f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$ fonkiyonunun periyodu, $T = \frac{2\pi}{|b|}$

$g(x) = m \cdot \tan(nx + k)$ fonksiyonunun periyodu, $T = \frac{\pi}{|n|}$ olur.

Buradan $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{7} \Rightarrow |b| = 7$, $\frac{\pi}{|n|} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow |n| = 5$ olur.

$|b| \cdot |n| = |b \cdot n| = 7 \cdot 5 = 35 \Rightarrow b \cdot n = 35$ veya $b \cdot n = -35$ olur.

Pozitif değer istendiğinde $b \cdot n = 35$ bulunur.

Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri

Doğrusal fonksiyonların grafiklerini çizmeyi daha önce öğrenmiştik. Burada trigonometrik fonksiyonların grafiklerini çizeceğiz.

a. Sinüs Fonksiyonunun Grafiği

$f:\mathbb{R} \to [-1,1]$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun periyodu $T = 2\pi$ olduğundan ilk olarak grafik $[0,2\pi]$ aralığında çizilir.

Elde edilen bu grafik ..., $[-4\pi,-2\pi]$, $[-2\pi,0]$, $[0,2\pi]$, $[2\pi,4\pi]$, ... aralıklarına tekrarlanırsa $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun grafiği çizilmiş olur.

$[0,2\pi]$ aralığında $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun bazı özel açılar için değerlerini bulalım.

$x = 0$ için $y = \sin 0 = 0$ ise $(0,0)$

$x = \frac{\pi}{2}$ için $y = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ ise $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$

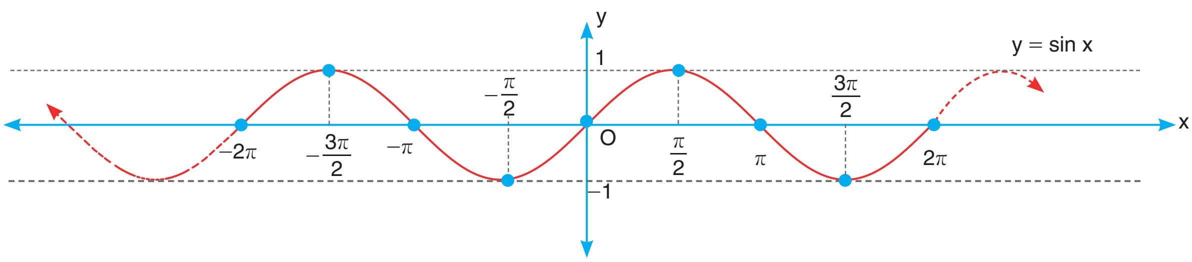
$x = \pi$ için $y = \sin\pi = 0$ ise $(\pi,0)$

$x = \frac{3\pi}{2}$ için $y = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$ ise $\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$

$x = 2\pi$ için $y = \sin 2\pi = 0$ ise $(2\pi,0)$ olur.

Bulunan noktalar dik koordinat sisteminde işaretlenirse $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun periyot aralığındaki grafiği elde edilir. Bu grafik her periyot aralığında tekrarlandığında istenen grafik aşağıdaki gibi çizilmiş olur.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	0	1	0	–1	0



Grafiği incelediğimizde

$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ ile $\left(-\frac{\pi}{2},-1\right)$, $(\pi,0)$ ile $(-\pi,0)$, $\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$ ile $\left(-\frac{3\pi}{2},1\right)$, $(2\pi,0)$ ile $(-2\pi,0)$ vb. periyot aralığındaki noktaların orijine göre simetrik olduğu görülür.

Bir fonksiyonun grafiği orijine göre simetrik ise fonksiyon tek fonksiyon şeklinde adlandırılır.

Buna göre sinüs fonksiyonunun periyot aralığındaki grafiği, orijine göre simetrik noktalardan oluştuğundan sinüs fonksiyonu tek fonksiyondur.

Bu durumda $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$ olur.

Örnek

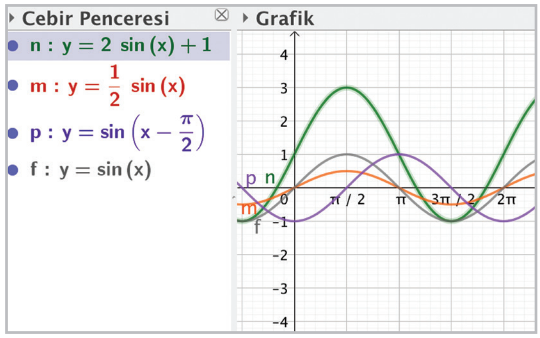
$f:[0,2\pi] \rightarrow [-1,1]$ $f(x) = \sin x$ fonksiyonu veriliyor. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini aynı analitik düzlemde çizelim.

a) $\frac{1}{2}f(x)$ **b)** $2f(x)+1$ **c)** $f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

Çözüm

$f(x) = \sin x$ fonksiyonunun periyodu 2π dir.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = \sin x$	0	1	0	–1	0
$m = \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2}\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0
$n = 2f(x)+1 = 2\sin x + 1$	1	3	1	–1	1
$p = f\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$	–1	0	1	0	–1



Yukarıda bir değişim tablosu bulunmaktadır. Bu tabloda elde ettiğimiz noktaları analitik düzlemde işaretlersek yukarıdaki grafikleri çizeriz. Diğer bir yol olarak bir dinamik matematik yazılımının giriş bölümüne ayrı ayrı fonksiyonları yazıp Enter tuşuna bastığımızda grafikleri çizebiliriz. $f(x) = a\sin x$ fonksiyonunda a katsayısı büyüdükçe grafik, y ekseni boyunca genişlemektedir. $f(x) = b + \sin x$ fonksiyonunun grafiği, $y = \sin x$ fonksiyonunun grafiğinin y ekseni boyunca $b < 0$ ise negatif yönde, $b > 0$ ise pozitif yönde $|b|$ birim ötelenmişidir. $f(x) = \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ fonksiyonun grafiği, $y = \sin x$ fonksiyonun grafiğinin x ekseninde $\frac{\pi}{2}$ br sağa ötelenmişidir.

b. Kosinüs Fonksiyonunun Grafiği

$f:\mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$, $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun periyodu $T = 2\pi$ olduğundan ilk olarak grafik $[0,2\pi]$ aralığında çizilir.

Elde edilen grafik ..., $[-4\pi,-2\pi]$, $[-2\pi,0]$, $[0,2\pi]$, $[2\pi,4\pi]$, ... aralıklarında tekrarlanırsa $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun grafiği çizilmiş olur.

$[0,2\pi]$ aralığında $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun bazı özel açılar için değerlerini bulalım.

$x = 0$ için $y = \cos 0 = 1$ ise $(0,1)$

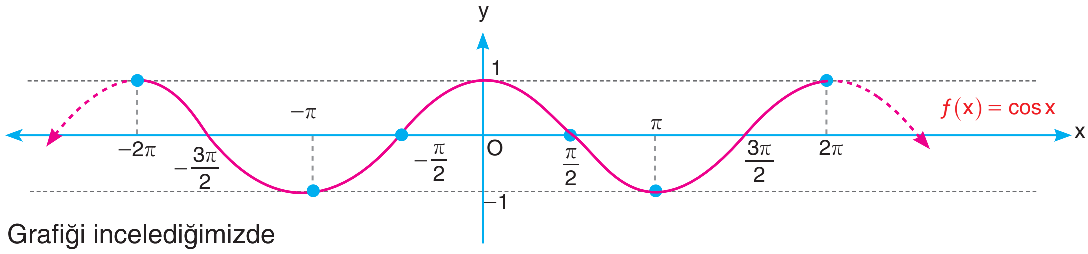
$x = \frac{\pi}{2}$ için $y = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ ise $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

$x = \pi$ için $y = \cos\pi = -1$ ise $(\pi,-1)$

$x = \frac{3\pi}{2}$ için $y = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$ ise $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$

$x = 2\pi$ için $y = \cos 2\pi = 1$ ise $(2\pi,1)$ olur.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos x	1	0	–1	0	1



Grafiği incelediğimizde

$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ile $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $(\pi, -1)$ ile $(-\pi, -1)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ ile $\left(-\frac{3\pi}{2}, 0\right)$, $(2\pi, 1)$ ile $(-2\pi, 1)$ vb. periyot aralığındaki noktaların y eksenine göre simetrik olduğu görülür.

Bir fonksiyonun grafiği, y eksenine göre simetrik ise fonksiyon çift fonksiyon şeklinde adlandırılır.

Buna göre kosinüs fonksiyonunun periyot aralığındaki grafiği, y eksenine göre simetrik noktalardan oluştuğundan kosinüs fonksiyonu çift fonksiyondur.

Bu durumda $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$ olur.

Örnek

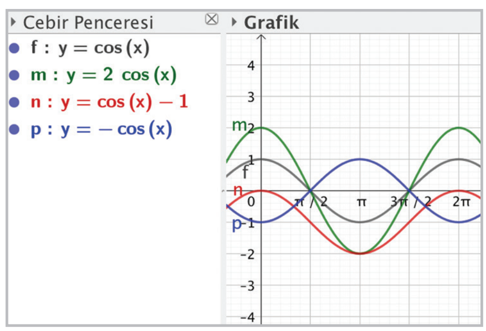
$f : [0, 2\pi] \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ fonksiyonu veriliyor. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini aynı analitik düzlemde çizelim.

a) $2f(x)$ **b)** $f(x) - 1$ **c)** $-f(x)$

Çözüm

$f(x) = \cos x$ fonksiyonunun periyodu 2π dir.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = \cos x$	1	0	−1	0	1
$m = 2f(x) = 2\cos x$	2	0	−2	0	2
$n = f(x) - 1 = \cos x - 1$	0	−1	−2	−1	0
$p = -f(x) = -\cos x$	−1	0	1	0	−1



Yukarıdaki değişim tablosunda verilen noktaları dik koordinat sisteminde işaretlersek tablonun yanındaki grafiği elde ederiz.

$f(x) = a\cos x$ fonksiyonunda a katsayısı büyüdükçe grafik, y ekseni boyunca genişlemektedir.

$f(x) = b + \cos x$ fonksiyonunun grafiği, $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun grafiğinin y ekseni boyunca $b < 0$ ise negatif yönde, $b > 0$ ise pozitif yönde $|b|$ birim ötelenmişidir.

$y = a\sin(bx + c)$ ve $y = a\cos(bx + c)$ fonksiyonlarının herhangi bir periyotta grafiği çizilirken periyot bulunur.

$|b| > 1$ ise periyot küçüleceğinden grafik, x ekseni boyunca daralır.

$|b| < 1$ ise periyot büyüyeceğinden grafik, x ekseni boyunca genişler.

Bilgi-İletişim Teknolojisi

Bir dinamik matematik yazılımını kullanarak

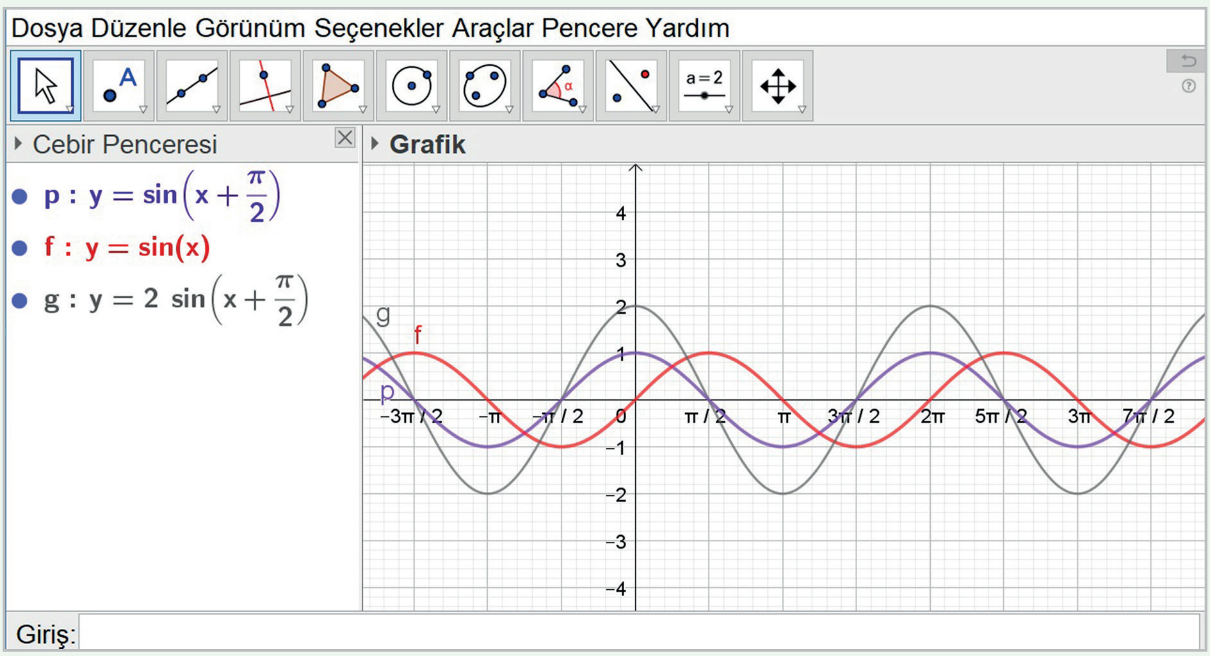
a) $f(x) = \sin x$, $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

b) $f(x) = \sin x$, $f(x) = \sin(2x)$, $f(x) = \sin(2x) + 2$

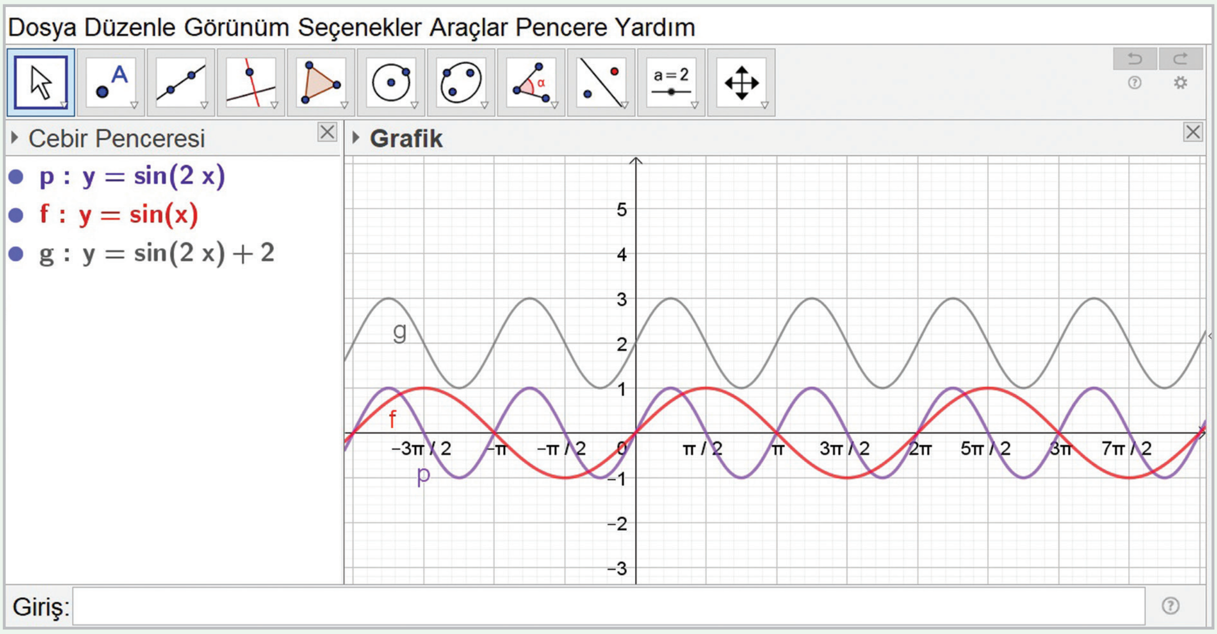
fonksiyonlarının grafiklerini aynı analitik düzlemde çizelim.

Dinamik matematik yazılımını çalıştırıp matematiksel fonksiyonlar seçeneğinden $\sin(x)$ seçeneğine tıklayarak yukarıdaki fonksiyonları ayrı ayrı yazıp Enter tuşuna bastığımızda aşağıdaki grafikleri elde ederiz.

a)



b)



1) $f(x) = a\sin(x)$ fonksiyonunda a değeri büyüdükçe grafik, y ekseninin pozitif yönüne doğru genişlemektedir.

2) $f(x) = \sin(x - c)$ fonksiyonunun grafiği, $y = \sin x$ fonksiyonunun grafiğinin x ekseninin pozitif yönünde c birim sağa ötelenmiştir.

3) $f(x) = \sin(bx)$ fonksiyonunda $|b|$ değeri büyüdükçe grafik, x ekseni boyunca daralmaktadır.

4) $f(x) = \sin(x) + k$ fonksiyonunun grafiği, $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun grafiğinin y ekseni boyunca $k < 0$ ise negatif yönde; $k > 0$ ise pozitif yönde $|k|$ birim ötelenmişidir.

c. Tanjant Fonksiyonunun Grafiği

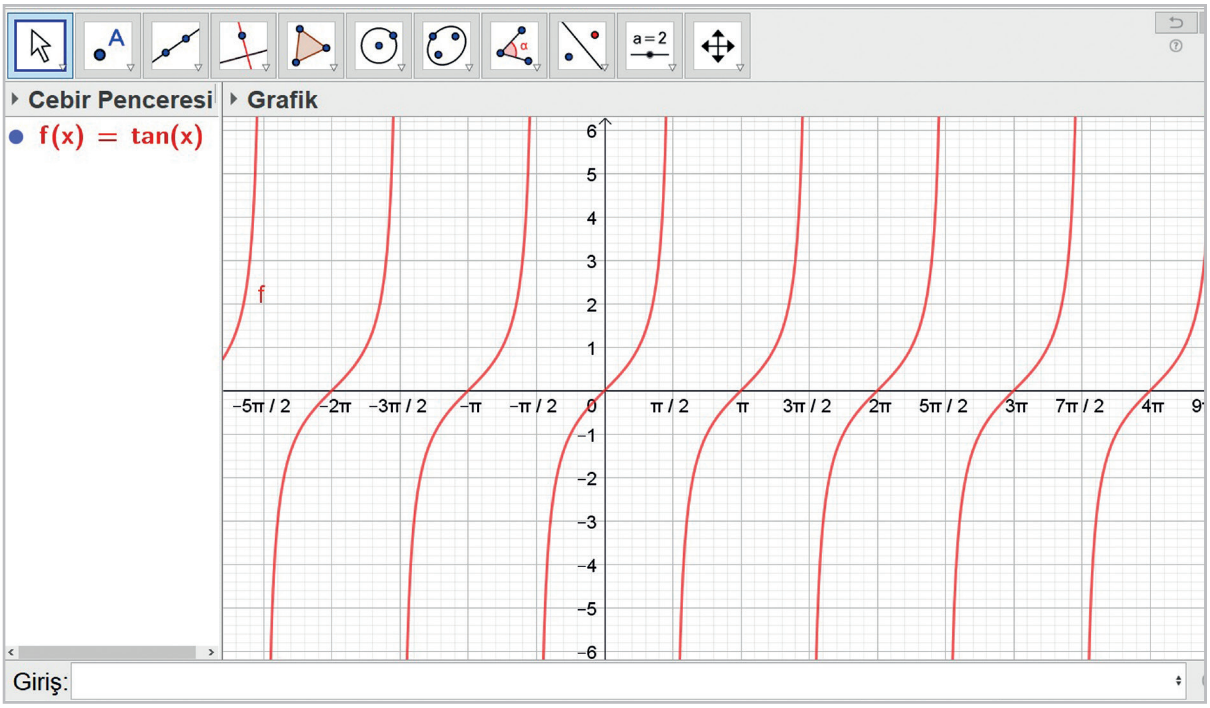
$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$f: \mathbb{R} - \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun periyodu π dir. Fonksiyonun $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında değişim tablosu aşağıdaki gibidir.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
tan x	‖ $-\infty$	−1	0	1	‖ $+\infty$

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ nda çizilen grafik, $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, ... aralıklarına aktarılırsa $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun grafiği çizilir.

$f(x) = \tan x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi olur.



Grafiği incelediğimizde $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun grafiği orijine göre simetrik olduğundan $f(x) = \tan x$ fonksiyonu tek fonksiyondur. $f(-x) = \tan(-x) = -\tan x = -f(x)$ tir.

d. Kotanjant Fonksiyonunun Grafiği

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$f : \mathbb{R} - \{x : x = k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \cot x$ fonksiyonunun periyodu π dir. Fonksiyonun $(0, \pi)$ aralığında değişim tablosu aşağıdaki gibidir.

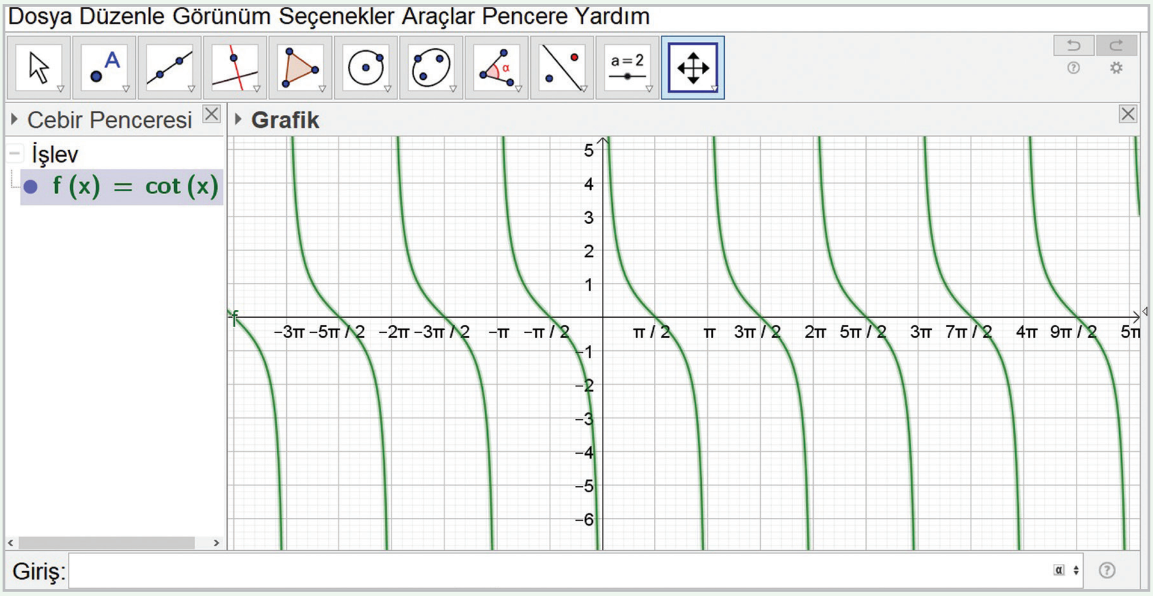
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\cot x$	$+\infty$	-1	0	-1	$-\infty$

$(0, \pi)$ nda çizilen grafik, ... $(-\pi, 0), (\pi, 2\pi)$, ... aralıklarına aktarılırsa $f(x) = \cot x$ fonksiyonunun grafiği çizilmiş olur.

Grafiği incelediğimizde $f(x) = \cot x$ fonksiyonunun grafiği orijine göre simetrik olduğundan $f(x) = \cot x$ fonksiyonu tek fonksiyondur. $f(-x) = \cot(-x) = -\cot x = -f(x)$ tir.

Bilgi-İletişim Teknolojisi

Dinamik matematik yazılımında $f(x) = \cot x$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



1.2.5. Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

Trigonometrik fonksiyonlar örtendir fakat bire bir değildir. Trigonometrik fonksiyonların tanım kümeleri daraltılarak bire bir olduğu aralıklar bulunabilir. Bire bir ve örten fonksiyonların tersinin de bir fonksiyon olduğunu biliyoruz. Bu bölümde, trigonometrik fonksiyonların bire bir ve örten olduğu aralıklarda tersi olan fonksiyonlardan bahsedeceğiz.

Bilgi

$f:\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1],\ f(x) = \sin x$ fonksiyonu bire bir ve örten olduğundan bu fonksiyonun tersi vardır. Tersi olan

$f^{-1}: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ fonksiyonuna **arksinüs fonksiyonu** denir ve

$f^{-1}(x) = \arcsin x$ ile gösterilir. Buradan $y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$ olur.

Örnek

Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulalım.

a) $\arcsin 1$ **b)** $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ **c)** $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **ç)** $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$

Çözüm

arcsin $: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ olduğundan $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$'dır.

a) $\arcsin 1 = x$ olsun.

$\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2}$'dir.

b) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = x$ olsun.

$\sin x = -\frac{1}{2}$

$x = -\frac{\pi}{6}$'dır.

c) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = x$ olsun.

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{\pi}{3}$

$\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sin x$

$= \sin\frac{\pi}{3}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$ olur.

ç) $\arcsin\frac{1}{2} = x$ olsun.

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{6}$

$\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) = \cos x$

$= \cos\frac{\pi}{6}$

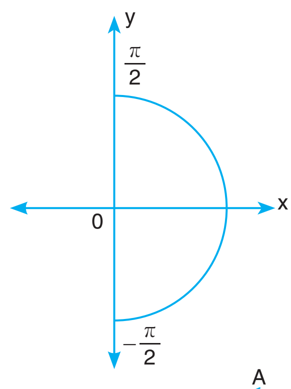
$= \frac{\sqrt{3}}{2}$ olur.

Örnek

$\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

arcsin$:[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$'dır.



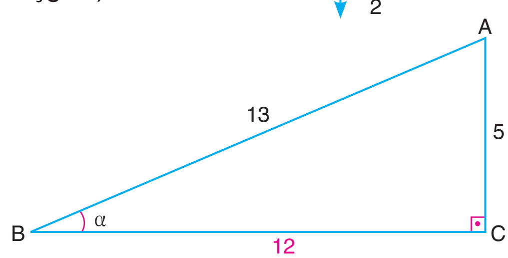
Yandaki şekilde görüldüğü gibi arksinüs fonksiyonunun görüntü kümesinde kosinüs fonksiyonu pozitif değer alır (I ve IV. bölge).

$\arcsin\frac{5}{13} = \alpha$ olsun.

$\sin\alpha = \frac{5}{13}$'tür. Bu orana uygun dik üçgeni çizelim.

ABC dik üçgeninde $|BC| = 12$ br olur (5-12-13 özel dik üçgeni).

$\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right) = \cos\alpha = \frac{12}{13}$ bulunur.



Örnek

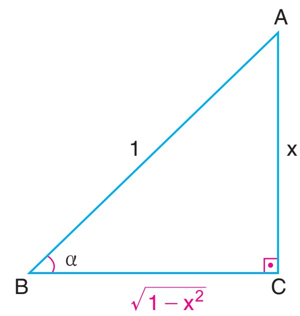
$x \in [-1,1]$ olmak üzere $\cos(\arcsin x)$ ifadesinin değerini x türünden bulalım.

Çözüm

$\arcsin x = \alpha$ olsun.

$\sin\alpha = x \Rightarrow \sin\alpha = \frac{x}{1}$ olur.

Bu orana uygun dik üçgen yandaki gibi olur.



ABC dik üçgeninde Pisagor teoremini uygulayalım.

$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$

$1^2 = |BC|^2 + x^2$

$|BC|^2 = 1 - x^2$

$|BC| = \sqrt{1-x^2}$ olur.

$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ olduğunda $\cos\alpha \geqslant 0$'dır.

Buradan $\cos(\arcsin x) = \cos\alpha = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2}$ bulunur.

Bilgi

$f:[0,\pi] \to [-1,1], f(x) = \cos x$ fonksiyonu bire bir ve örten olduğundan bu fonksiyonun tersi vardır. Tersi olan $f^{-1}:[-1,1] \to [0,\pi]$, $f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$ fonksiyonuna **arkkosinüs fonksiyonu** denir ve $f^{-1}(x) = \arccos x$ ile gösterilir.

Buradan $y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y$ dir.

Örnek

Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulalım.

a) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

c) $\cos(\arcsin 1)$

ç) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$

Çözüm

arccos:$[-1,1] \rightarrow [0,\pi]$ olduğundan $x \in [0,\pi]$'dır.

a) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = x$ olsun.

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ bulunur.

b) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = x$ olsun.

$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ olur.

c) $\arcsin 1 = x$ olsun.

$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ olur.

$\cos(\arcsin 1) = \cos x = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ bulunur.

ç) $\arcsin\frac{1}{2} = x$ olsun.

$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ olur.

$\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) = \cos x = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ bulunur.

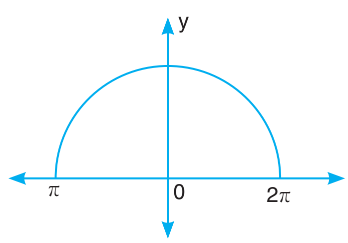
Örnek

$\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

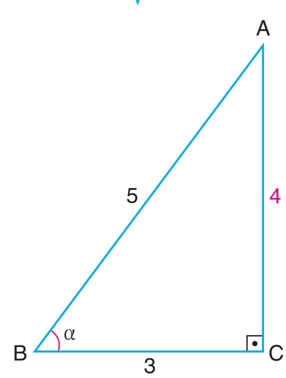
arccos : $[-1,1] \rightarrow [0,\pi]$'dır.

Yandaki şekilden görüldüğü gibi arkkosinüs fonksiyonunun görüntü kümesinde, sinüs fonksiyonu pozitif değer alır (I ve II. bölge).



$\arccos\frac{3}{5} = \alpha$ olsun.

$\cos\alpha = \frac{3}{5}$ olur. Bu orana uygun dik üçgeni çizelim.



$\cos\alpha = \frac{|BC|}{|BA|} = \frac{3}{5}$ olur.

ABC dik üçgeninde $|AC| = 4$ br olur (3-4-5 özel dik üçgeni).

Buradan $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right) = \sin\alpha = \frac{4}{5}$ bulunur.

Örnek

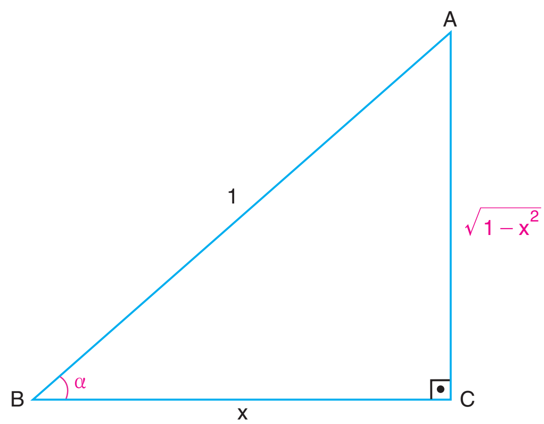
$x \in [-1, 1]$ olmak üzere $\sin(\arccos x)$ ifadesinin değerini x türünden bulalım.

Çözüm

$\arccos x = \alpha$ olsun.

$\cos\alpha = x \Rightarrow \cos\alpha = \frac{x}{1}$ olur.

Bu orana uygun dik üçgen yandaki gibi olur.



ABC dik üçgeninde Pisagor teoremini uygulayalım.

$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$

$1^2 = x^2 + |AC|^2$

$|AC|^2 = 1 - x^2$

$|AC| = \sqrt{1-x^2}$ olur.

$\alpha \in [0, \pi]$ olduğundan $\sin\alpha \geqslant 0$ olur.

Buradan $\sin(\arccos x) = \sin\alpha$

$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2}$ bulunur.

Bilgi

$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ f(x) = \tan x$ bire bir ve örtendir. $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun ters fonksiyonu, $\boldsymbol{f^{-1}(x) = \tan^{-1} x}$ ile tanımlanır. $\boldsymbol{y = \arctan x}$ biçiminde gösterilir.

$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, f(x) = \tan x$ ise $f^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ f^{-1}(x) = \arctan x$ olur.

Buradan $y = \tan x \ \Leftrightarrow \ x = \arctan y$ olur.

Örnek

$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ f(x) = \tan x$ fonksiyonunun ve $f^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), f^{-1}(x) = \arctan x$ fonksiyonunun bazı değerlerini bulalım.

Çözüm

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında hesaplanması kolay değerler alalım.

$x = -\frac{\pi}{4}$ için $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ $\qquad x = 0$ için $\tan 0 = 0$

$x = \frac{\pi}{4}$ için $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ olur.

$f(a) = b \ \Rightarrow f^{-1}(b) = a$ olduğundan $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \ \Rightarrow \ \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

$f(0) = \tan 0 = 0 \ \Rightarrow \ \arctan 0 = 0$ ve $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1 \ \Rightarrow \ \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ bulunur.

Örnek

Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulalım.

a) $\arctan(-1)$ **b)** $\arctan\sqrt{3}$ **c)** $\arctan 0$ **ç)** $\cos(\arctan 1)$

Çözüm

$\arctan:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ olduğundan $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$'dir.

a) $\arctan(-1)=x$ olsun.

$\tan x=-1$

$x=-\frac{\pi}{4}$'tür.

b) $\arctan\sqrt{3}=x$ olsun.

$\tan x=\sqrt{3}$

$x=\frac{\pi}{3}$'tür.

c) $\arctan 0=x$ olsun.

$\tan x=0$

$x=0$'dır.

ç) $\arctan 1=x$ olsun.

$\tan x=1$

$x=\frac{\pi}{4}$'tür. Buradan

$\cos(\arctan 1)=\cos x=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ bulunur.

Alıştırmalar 1-4

1. Aşağıdaki fonksiyonların periyotlarını bulunuz.

a) $f(x)=2\sin(5x-6)$ **b)** $f(x)=3\sin(-2x+4)$

c) $f(x)=-2\cos(3x+1)$ **ç)** $f(x)=-\cot(x+5)$

2. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini bir dinamik matematik yazılımını kullanarak çiziniz.

a) $f:[-2\pi,2\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=2\sin x$ **b)** $f:[-2\pi,2\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=-\cos x$

c) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=-\cot x$ **ç)** $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=2\tan x$

3. Aşağıda verilen ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ **b)** $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}+\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

c) $\arctan 0+\arctan 1$

4. $\tan\left(\arccos\frac{7}{25}\right)$ ifadesinin değerini bulunuz.

5. $\sin\left(\arctan 1+\arccos\frac{1}{2}-2\cdot\arcsin\frac{1}{2}\right)$ ifadesinin değerini bulunuz.

6. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+\arctan\sqrt{3}=\alpha$ ise $\sin\alpha$ değerini bulunuz.

1. DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Bir $\widehat{ABC}$ nde, $m(\widehat{A}) = 37°\,54'$, $m(\widehat{B}) = 84°\,36'$ olduğuna göre C açısının ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $53°\,27'$ B) $55°\,28'$ C) $57°\,30'$ D) $56°\,32'$ E) $55°\,28'$

2. $-2000°$lik açının esas ölçüsü kaç derecedir?

A) 120° B) 130° C) 140° D) 150° E) 160°

3. $-\frac{29\pi}{3}$ radyanlık açının esas ölçüsü kaç radyandır?

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{9}$

4. $4\sin 5x - 2 = m$ m olduğuna göre m aşağıdakilerden hangisi <u>olamaz</u>?

A) 3 B) 2 C) -4 D) -5 E) -6

5. $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ olduğuna göre $\sin x \cdot \cos x$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $-\frac{2}{3}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

6. $\frac{\cos^2 x - 1}{1 + \sec x} \cdot \frac{1}{1 - \sec x}$ ifadesinin en sade şekli aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) $\cos x - 1$ C) $\cos^2 x$ D) $\sin^2 x$ E) $\tan x$

7. $a = \cos 105°$, $b = \sin 255°$, $c = \sec 390°$, $d = \tan 220°$ olduğuna göre a, b, c ve d değenlerinin işaretleri sırasıyla hangisidir?

A) $-,-,+,+$ B) $+,+,-,+$
C) $-,-,+,-$ D) $+,-,+,-$
E) $+,+,+,-$

8. $\cos\frac{17\pi}{6} \cdot \sin\frac{20\pi}{3} + \tan\frac{19\pi}{4}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1 B) $-\frac{5}{4}$ C) $-\frac{3}{2}$ D) $-\frac{7}{4}$ E) -2

9. $\sin 50° = a$ olduğuna göre $\dfrac{\tan 230° \cdot \sec 320° - \text{cosec}\, 220°}{\tan 40°}$ ifadesinin a türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

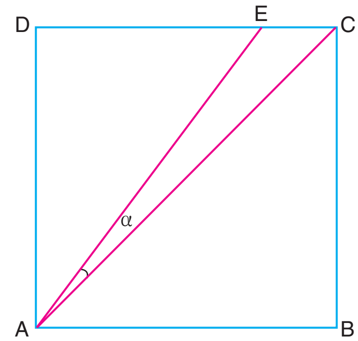
A) $\dfrac{1-a}{1+a}$ B) $\dfrac{1-a^2}{a}$ C) a^2-1 D) $\dfrac{1+a^2}{1-a^2}$ E) $\dfrac{2a}{1-a^2}$

10. $x = \dfrac{\pi}{8}$ olduğuna göre $\dfrac{\cos 8x + \cos 2x}{\sin 6x - \sin 4x}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{1}{4}$ B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) 2 E) 1

11. ABCD karesinde

$m(\widehat{EAC}) = \alpha$, $|DC| = 4|EC|$ olduğuna göre $\tan \alpha$ nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?



A) $\dfrac{1}{7}$ B) $\dfrac{1}{6}$ C) $\dfrac{1}{5}$ D) $\dfrac{1}{4}$ E) $\dfrac{1}{3}$

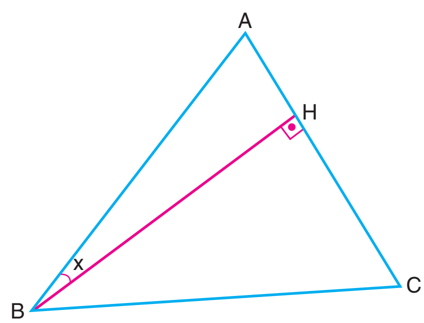
12. $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ve $\tan \alpha = -\dfrac{8}{15}$ olduğuna göre $\sin 2\alpha$ nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\dfrac{240}{289}$ B) $-\dfrac{210}{289}$ C) $-\dfrac{180}{289}$ D) $\dfrac{210}{289}$ E) $\dfrac{240}{289}$

13. $\widehat{ABC}$ nde $[BH] \perp [AC]$,

$m(\widehat{ABH}) = x$, $|AC| = |BC| = 7$ cm, $|AB| = 10$ cm

olduğuna göre $\cos x$ in değeri aşağıdakilerden hangisidir?



A) $\dfrac{4}{7}$ B) $\dfrac{\sqrt{5}}{7}$ C) $\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$ D) $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ E) $\dfrac{3\sqrt{6}}{7}$

14. $f(x) = \tan\left(\frac{x}{\pi} + \pi\right)$ fonksiyonunun periyodu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{\pi}$ B) $\frac{2}{\pi}$ C) π^2 D) $\frac{\pi^2}{2}$ E) $\frac{\pi^2}{4}$

15. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 5\cos(3x - 1)$ fonksiyonunun periyodu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{2\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) π E) 2π

16. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3\pi}{4}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{5\pi}{12}$ E) $\frac{\pi}{3}$

17. $\sin\left(\arctan\frac{4}{3}\right) + \sin\left(\arctan\frac{5}{12}\right)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{62}{65}$ B) $\frac{77}{65}$ C) $\frac{64}{65}$ D) 1 E) $\frac{66}{65}$

18. Aşağıdaki eşitliklerden doğru olanların başına "D", yanlış olanların başına "Y" yazınız.

a) ☐ $\sin 270° + \sin 360° = -2$

b) ☐ $\tan\pi + \cot\frac{3\pi}{2} = 0$

c) ☐ $\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{3\pi}{2} + \cos 0° = 1$

ç) ☐ $\cot\frac{\pi}{2} + \tan\frac{\pi}{2} = 1$

19. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ve $\operatorname{cosec} x = 3$ olduğuna göre $\cos^2 x - \sin x$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

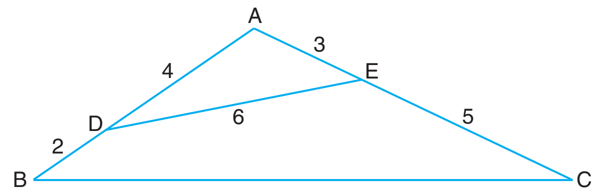
A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{5}{9}$ C) $\frac{7}{3}$ D) $\frac{7}{5}$ E) $\frac{3}{4}$

20. $\widehat{ABC}$ nde $D \in [AB], E \in [AC]$,

$|AD| = 4$ br, $|DB| = 2$ br, $|DE| = 6$ br,

$|AE| = 3$ br, $|EC| = 5$ br olduğuna göre

$|BC|$ kaç br'dir?

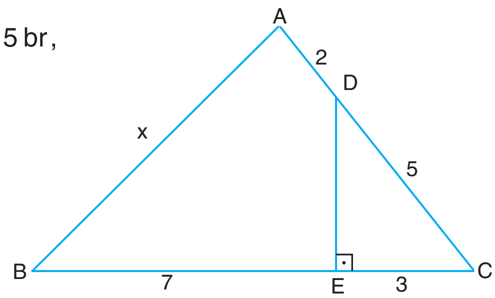


A) $3\sqrt{6}$ B) 12 C) $2\sqrt{7}$ D) 14 E) $3\sqrt{11}$

21. $\widehat{ABC}$ nde $D \in [AC]$, $[DE] \perp [BC]$, $|BE| = 7$ br, $|DC| = 5$ br,

$|EC| = 3$ br, $|AD| = 2$ br olduğuna göre

$|AB| = x$ kaç br'dir?

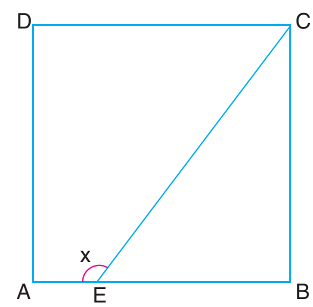


A) $\sqrt{33}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{7}$ D) $2\sqrt{14}$ E) $\sqrt{65}$

22. ABCD kare, $E \in [AB]$, $|AB| = 4|AE|$,

$m(\widehat{AEC}) = x$ olduğuna göre

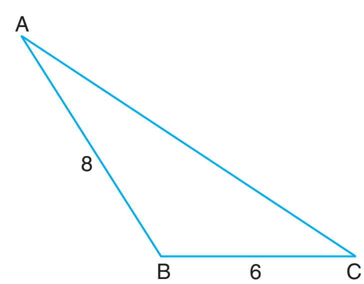
$\tan x$ değeri kaçtır?



A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{4}{3}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

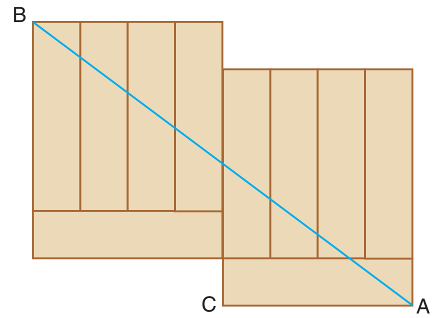
23. $\widehat{ABC}$ nde $|AB| = 8$ br, $|BC| = 6$ br,

$\cot \widehat{A} = \frac{4}{3}$ olduğuna göre $\sin \widehat{C}$ değeri kaçtır?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{7}$

24. Bir marangoz eş büyüklükteki tahta parçaları ile yandaki şekli oluşturmuştur.



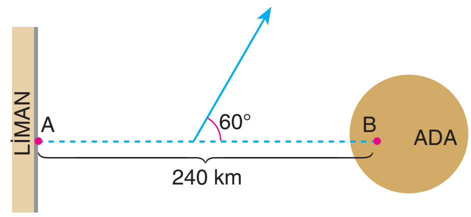
Buna göre $\tan(\widehat{BAC})$ değeri kaçtır?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$

D) 2 E) $\frac{7}{2}$

25. Bir limandaki A noktasından 240 km uzaklıktaki bir adanın B noktasına gitmekte olan gemi, saatte 20 km/sa. sabit hızla $[AB]$ boyunca hareket etmektedir.

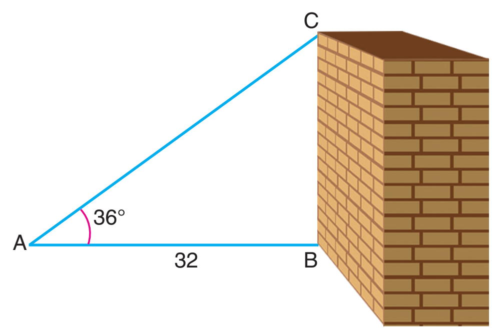
Bu gemi, harekete başladıktan 9 saat sonra $[AB]$ rotasından 60° lik açıyla sapmış ve bu şekilde aynı hızla 6 saat yol almıştır.



Buna göre son durumda gemi, B noktasından kaç km uzaklıkta olur?

A) $48\sqrt{3}$ B) $50\sqrt{3}$ C) $54\sqrt{3}$ D) $56\sqrt{3}$ E) $60\sqrt{3}$

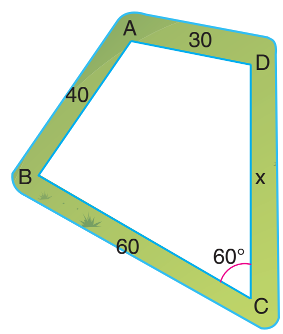
26. Güneş'in yer düzlemi ile 36°lik açı yaptığı bir anda $|AB| = 32$ m ölçülüyor. $\sin 54° \approx 0,80$ ve $\sin 36° \approx 0,59$ alınırsa duvarın $[BC]$ yüksekliği yaklaşık kaç metredir?



A) 23 B) 23,2 C) 23,4 D) 23,6 E) 24

27. Yanda ABCD dörtgeni biçiminde bir yürüyüş parkı verilmiştir.

Bu yürüyüş parkında $m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = 180°$, $m(\widehat{C}) = 60°$, $|AB| = 40$ m, $|AD| = 30$ m, $|BC| = 60$ m ve $|DC| = x$ metredir.



Buna göre x kaç metredir?

A) 40 B) $40 + \sqrt{10}$ C) $40 - \sqrt{10}$ D) $30 + \sqrt{10}$ E) $30 + 10\sqrt{10}$

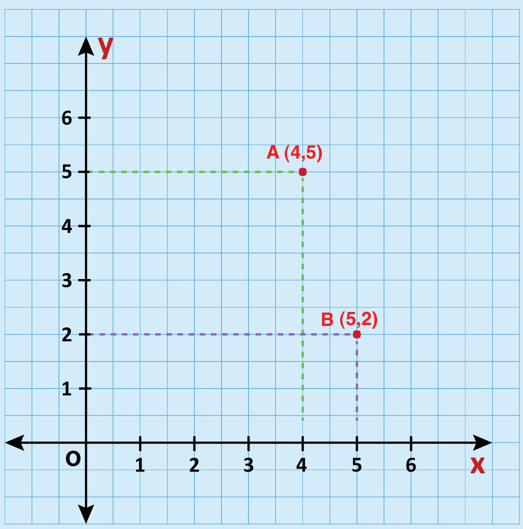
Ölçme ve Değerlendirme Soruları

2

ANALİTİK GEOMETRİ

Bu bölümde;

- Analitik düzlemde iki nokta arasındaki uzaklığı veren bağıntıyı elde ederek problemleri çözmeyi,
- Bir doğru parçasını belli bir oranda (içten veya dıştan) bölen noktanın koordinatlarını hesaplamayı,
- Analitik düzlemde doğruları inceleyerek işlemler yapmayı,
- Bir noktanın bir doğruya uzaklığını hesaplamayı öğreneceksiniz.



Terimler ve Semboller

Terimler ve Kavramlar: analitik düzlem, iki nokta arasındaki uzaklık, doğrunun eğimi, eğim açısı, iki doğrunun paralelliği, iki doğrunun dikliği

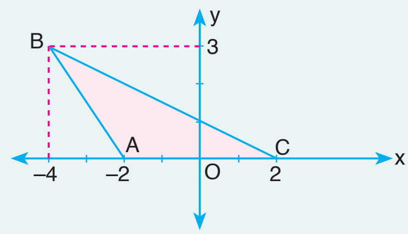
Sembol ve Gösterimler: $A(x, y), |AB|, m, d_1 \parallel d_2, d_1 \perp d_2$

Hazırlık Çalışması

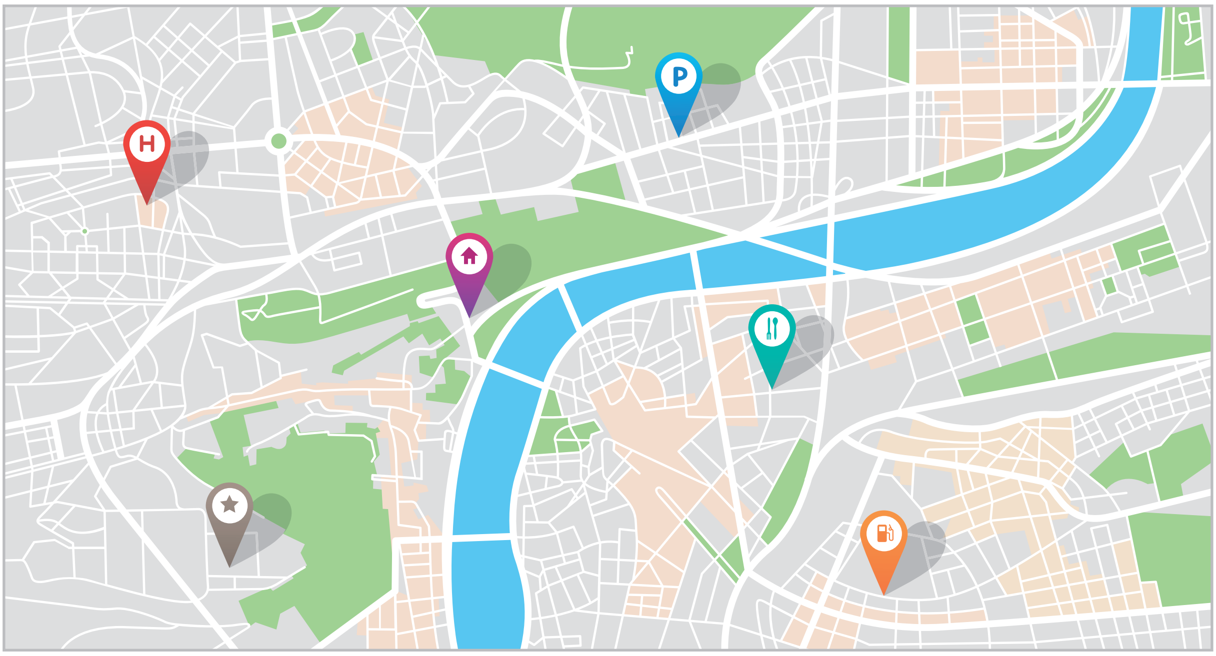
1. Aşağıdaki noktaları analitik düzlemde gösteriniz.

a) $A(3,-2)$ **b)** $B(-2,5)$ **c)** $C(3,2)$ **ç)** $D(-2,-1)$ **d)** $E(0,-1)$ **e)** $F(3,0)$

2. Yanda köşe noktaları analitik düzlemde verilen ABC üçgeninin alanını bulunuz.



2.1. DOĞRUNUN ANALİTİK İNCELENMESİ



Düzenli olarak kodlanmış sistemlerin birbirleri arasında yaptıkları sinyal alışverişlerinde yörünge içinde yer alan uyduların, kişinin veya cihazın dünya üzerindeki kesin konumunu belirlemesine **GPS (Global Positioning System, Gılobal Pozişının Sistem)** denilmektedir.

GPS'nin Türkçe karşılığı **küresel konum belirleme sistemi**dir.

Dünya üzerinde her bir noktanın enlem ve boylam olarak GPS koordinatları vardır.

Örneğin Türkiye haritasında Ankara'daki belirli bir noktanın enlem ve boylam olarak koordinatları $39°56'25''$ ve $32°51'24''$ dir.

Siz de bulunduğunuz konumun koordinatlarını araştırınız.

2.1.1. Analitik Düzlem ve Analitik Düzlemde İki Nokta Arasındaki Uzaklık

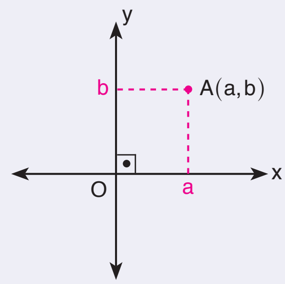
Analitik Düzlem

Bilgi

İki sayı doğrusunun sıfır noktalarında dik kesişmesiyle oluşan sisteme **dik koordinat sistemi**, sistemin içinde olduğu düzleme **analitik düzlem (dik koordinat düzlemi)** adı verilir.

Dik kesişen bu sayı doğruları, koordinat sisteminin eksenleridir.

Yatay eksene **x ekseni (apsisler ekseni)** dikey eksene **y ekseni (ordinatlar ekseni)**, eksenlerin kesiştiği O (0,0) noktasına **orijin** adı verilir.



Analitik düzlemde her bir nokta, iki bileşeniyle ifade edilir ve A(x,y) biçiminde gösterilir.

A(a,b) noktasının apsisi a, ordinatı ise b'dir.

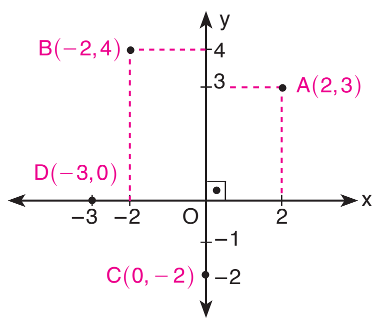
Analitik düzlemde, x ekseni üzerindeki tüm noktaların ordinatları, y ekseni üzerindeki tüm noktaların apsisleri 0'dır.

Örnek

$A(2,3)$, $B(-2,4)$, $C(0,-2)$ ve $D(-3,0)$ noktalarını analitik düzlemde gösterelim.

Çözüm

A noktasının apsisi (1. bileşen) 2, ordinatı (2. bileşen) 3 tür. B noktasının apsisi –2, ordinatı 4; C noktasının apsisi 0, ordinatı –2 (apsisi 0 olduğundan y ekseni üzerinde); D noktasının apsisi –3, ordinatı 0'dır (ordinat 0 olduğundan x ekseni üzerinde). Bu noktaların analitik düzlemde işaretlenmiş hâli yandaki gibi olur.



Analitik Düzlemin Bölgeleri

Bilgi

Analitik düzlemi oluşturan sayı doğruları, düzlemi dört bölgeye ayırır.

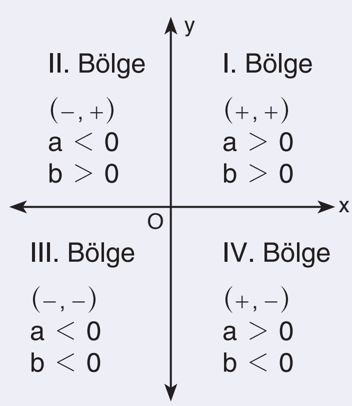
Bu bölgeler saat yönünün tersinde adlandırılır.

$A(a,b)$ noktasında $a > 0$, $b > 0$ ise $A(a,b)$ noktası I. bölgededir.

$A(a,b)$ noktasında $a < 0$, $b > 0$ ise $A(a,b)$ noktası II. bölgededir.

$A(a,b)$ noktasında $a < 0$, $b < 0$ ise $A(a,b)$ noktası III. bölgededir.

$A(a,b)$ noktasında $a > 0$, $b < 0$ ise A noktası IV. bölgededir.



Örnek

Analitik düzlemde $A(ab,\ b-a)$ noktası II. bölgede ise $B(a, b)$ noktasının kaçıncı bölgede olduğunu bulalım.

Çözüm

$A(ab,\ b-a)$ noktası II. bölgede ise

$ab < 0$ ve $b-a > 0$ olmalıdır.

$ab < 0$ ise $a < 0$ ve $b > 0$ veya $a > 0$ ve $b < 0$ olmalıdır.

$b-a > 0$ ise $b > a$ olur.

$b > a$ olduğundan $a < 0,\ b > 0$ dır.

$B(a, b)$ noktasında $a < 0,\ b > 0$ olduğundan

$B(a, b)$ noktası da II. bölgededir.

Örnek

Analitik düzlemde $A\left(\frac{a}{b}, ab^2\right)$ noktası III. bölgede ise $B(a, b)$ noktasının kaçıncı bölgede olduğunu bulalım.

Çözüm

$A\left(\frac{a}{b}, ab^2\right)$ noktası III. bölgede ise $\frac{a}{b} < 0$ ve $ab^2 < 0$ olur.

$\frac{a}{b} < 0 \Rightarrow a < 0$ ve $b > 0$ veya $a > 0$ ve $b < 0$ olur.

$a \cdot b^2 < 0 \Rightarrow b^2 > 0$ olacağından $a < 0$'dır (Sıfırdan farklı sayıların çift sayı kuvvetleri pozitif tam sayıdır).

O hâlde $a < 0$ ise $b > 0$ olur.

$B(a, b)$ noktasında $a < 0,\ b > 0$ olduğundan $B(a, b)$ noktası II. bölgededir.

Örnek

$A(2x-6,\ 3x-2)$ noktası y ekseni üzerinde ise A noktasının ordinatını bulalım.

Çözüm

$A(2x-6,\ 3x-2)$ noktası y ekseni üzerinde ise apsisi 0'dır. O hâlde

$2x-6=0 \Rightarrow x=3$ bulunur.

Bu x değerini A noktasının ordinatında yerine yazarsak $3 \cdot 3 - 2 = 7$ bulunur.

E-İçerik

Örnek

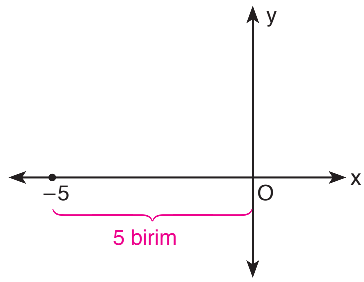
$A(4x-1, x+1)$ noktası x ekseni üzerinde ise A noktasının orijine uzaklığını bulalım.

Çözüm

$A(4x-1,\ x+1)$ noktası x ekseni üzerinde ise ordinatı 0 dır. O hâlde $x+1=0$ ise $x=-1$ olur.

Bu değeri $A(4x-1, x+1)$ noktasında yerine yazarsak

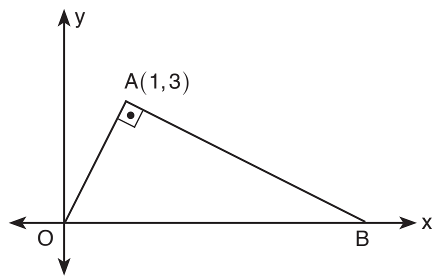
$A(4(-1)-1, -1+1) = A(-5, 0)$ olur. A noktasının orijine uzaklığı 5 birimdir.



Örnek

$A(1,3)$ noktası AOB dik üçgeninin dik köşesidir.

Buna göre AOB dik üçgeninin alanını bulalım.



Çözüm

$[AH] \perp [OB]$ nı çizersek $|AH| = 3$ br, $|OH| = 1$ br olur.

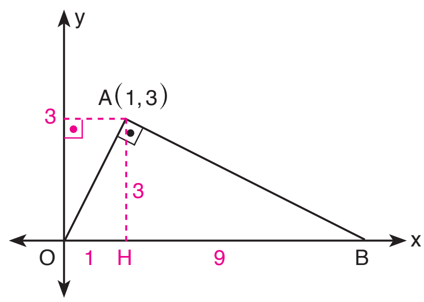
AOB dik üçgeninde Öklid teoremini uygulayalım.

$|AH|^2 = |OH| \cdot |HB|$

$3^2 = 1 \cdot |HB|$ olur.

$|HB| = 9$ br olduğundan $|OB| = 10$ olur. Buradan

$A(\widehat{AOB}) = \dfrac{|AH| \cdot |OB|}{2} = \dfrac{3 \cdot 10}{2} = 15$ br^2 bulunur.



Analitik Düzlemde İki Nokta Arasında Uzaklık

Etkinlik

• Yandaki analitik düzlemde A ve B noktaları işaretlenmiştir.

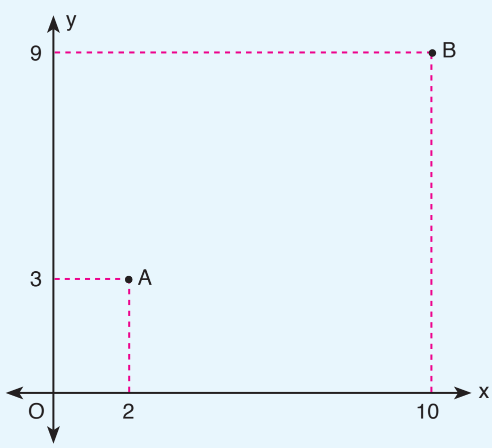
• A ve B noktalarının koordinatlarını söyleyiniz.

• $[AB]$ nı hipotenüs kabul eden dik üçgen oluşturunuz.

• Oluşturduğunuz dik üçgenin dik kenar uzunluklarını bulunuz.

• Dik kenar uzunluklarını noktaların koordinatlarıyla ilişkilendiriniz.

• Oluşturduğunuz dik üçgenin hipotenüs uzunluğu olan $|AB|$ nu bulunuz.



Örnek

A(2,2) ve B(5,6) noktalarını analitik düzlemde işaretleyip bu noktaları birleştiren doğru parçasının uzunluğunu hesaplayalım.

Çözüm

A(2,2) noktasından y eksenine inilen dikmenin uzantısıyla B(5,6) noktasından x eksenine inilen dikmenin kesişim noktasına H dersek BAH dik üçgeni elde edilir.

$|AH| = 5 - 2 = 3$ br, $|BH| = 6 - 2 = 4$ br dir.

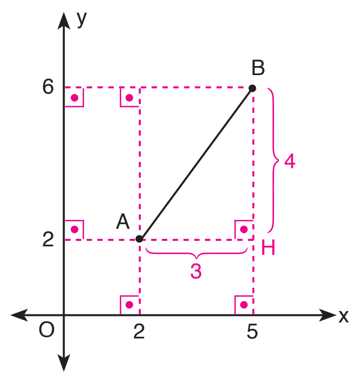
BAH dik üçgeninde Pisagor teoremini uygulayalım.

$|AB|^2 = |AH|^2 + |BH|^2$

$|AB|^2 = 3^2 + 4^2$

$|AB| = \sqrt{9+16}$

$|AB| = \sqrt{25} = 5$ br olur.



Bilgi

A(x_1, y_1) ve B(x_2, y_2) noktaları verilsin.

A(x_1, y_1) ve B(x_2, y_2) arasındaki uzaklık [AB] nın uzunluğuna eşittir. AHB dik üçgeninde

$|AH| = x_2 - x_1$

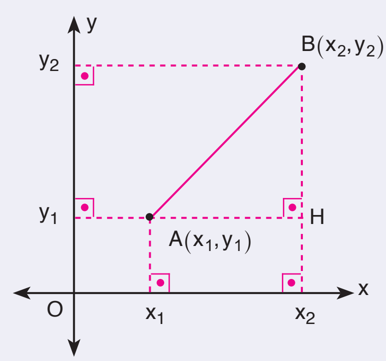
$|BH| = y_2 - y_1$ olur.

AHB dik üçgeninde Pisagor teoremini uygulayalım.

$|AB|^2 = |AH|^2 + |BH|^2$

$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ (her iki tarafın karekökü alınırsa)

$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ olur.



Örnek

Analitik düzlemde verilen A(2,6) ve B(8, – 2) noktaları arasındaki uzaklığın kaç br olduğunu bulalım.

Çözüm

$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$|AB| = \sqrt{(8-2)^2 + (-2-6)^2}$

$|AB| = \sqrt{6^2 + (-8)^2}$

$|AB| = \sqrt{36+64}$

$|AB| = \sqrt{100} = 10$ br bulunur.

Örnek

Analitik düzlemde A(a, 2) ve B(4, 7) noktaları arasındaki uzaklık 13 br olduğuna göre a'nın hangi değerleri alabileceğini bulalım.

Çözüm

$|AB| = 13$ br olarak verilmiştir.

$|AB| = \sqrt{(4-a)^2 + (7-2)^2} = 13$

$\sqrt{(4-a)^2 + 5^2} = 13$ (Eşitliğin sol tarafını kökten kurtarmak için her iki tarafın karesini alalım.)

$(4-a)^2 + 25 = 169$

$(4-a)^2 = 144$ ise $|4-a| = 12$

$|4-a| = 12$ ise $4-a = 12$ veya $4-a = -12$

$a = -8$ veya $a = 16$ bulunur.

Örnek

A(2, 5), B(4, 0), C(3, −3) ve D(−3, −4) noktalarını orijine uzaklıkları bakımından büyükten küçüğe doğru sıralayalım.

Çözüm

$|OA| = \sqrt{(2-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

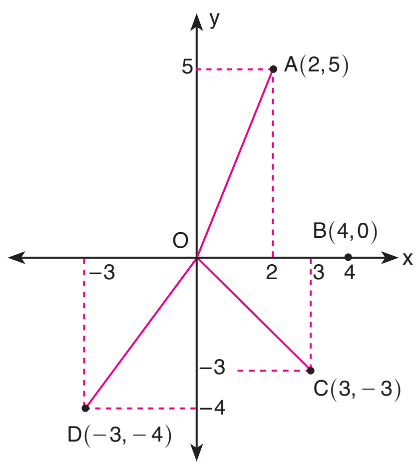
$|OB| = \sqrt{4^2 + 0^2} = \sqrt{16+0} = \sqrt{16} = 4$ br

$|OC| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ br

$|OD| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ br olur.

$\sqrt{29} > 5 > 3\sqrt{2} > 4$ olduğundan

$|OA| > |OD| > |OC| > |OB|$ bulunur.



Örnek

A(4, 1) ve B(−4, 3) olmak üzere A ve B noktalarına eşit uzaklıkta, y ekseni üzerindeki noktanın ordinatını bulalım.

Çözüm

İstenen nokta y ekseni üzerinde olduğundan bu noktaya C(0, y) diyelim. İki nokta arasındaki uzaklık bağıntısından

$|AC| = \sqrt{(0-4)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{16 + (y-1)^2}$ .....(1)

$|BC| = \sqrt{(0-(-4))^2 + (y-3)^2} = \sqrt{4^2 + (y-3)^2} = \sqrt{16 + (y-3)^2}$ .....(2) olur.

(1) ve (2) birbirine eşit olduğundan

$\sqrt{16 + (y-1)^2} = \sqrt{16 + (y-3)^2}$ (Karekökü kaldırmak için her iki tarafın karesini alalım.)

$16 + (y-1)^2 = 16 + (y-3)^2$

$y^2 - 2y + 1 = y^2 - 6y + 9$

$-2y + 6y = 9 - 1$

$4y = 8$

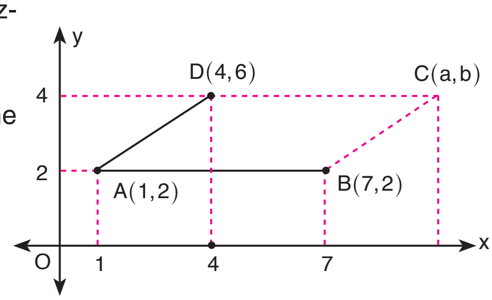
$y = 2$'dir.

Örnek

ABCD paralelkenarının köşeleri A(1, 2), B(7, 2), C(a, b), D(4, 6) ise paralelkenarın çevre uzunluğunun kaç br olduğunu bulalım.

Çözüm

Verilen noktalardan koordinatları belli olanları analitik düzlemde işaretleyelim.



Paralelkenarın karşılıklı kenarlarının uzunlukları birbirine eşittir.

$|AB| = |CD|$ ve $|AD| = |BC|$

$|AB| = \sqrt{(7-1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{36 + 0} = 6$

$|AD| = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ olur.

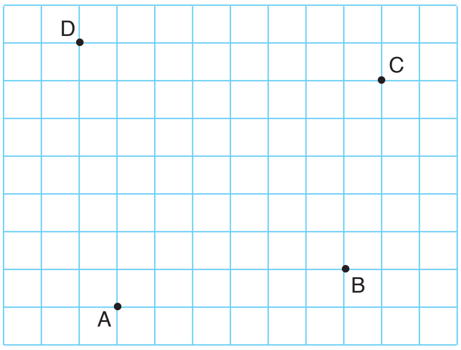
Çevre(ABCD) $= 2(|AB| + |AD|) = 2(6 + 5) = 22$ br bulunur.

Alıştırmalar 2-1

1. $A(2a-b, b+4)$ noktası orijini belirttiğine göre $B\left(\frac{ab}{2}, 2b+3a\right)$ noktası kaçıncı bölgededir?

2. $A(ab^2, a^4b)$ noktası III. bölgede ise $B\left(a^3b^3, \frac{a}{b}\right)$ noktası kaçıncı bölgededir?

3. Yandaki kareli zeminde, verilen analitik düzlemin bir parçası görülmektedir.
Eksenler ve başlangıç noktası verilmemiştir. Her bir karenin bir kenarının uzunluğu 1 birimdir.
A noktasının koordinatları $A(-2, -3)$ olduğuna göre B, C ve D noktalarının koordinatlarını bulunuz.



4. $A(n+1, 2n-6)$ noktası analitik düzlemin IV. bölgesinde ise n nin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

5. $A(4,3)$ ve $B(-1,-3)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

6. $A(-3,-2)$, $B(1,-2)$, $C(4,2)$, $D(1,5)$ ve $E(-5,4)$ noktaları sırasıyla bir beşgenin köşe koordinatlarıdır. Buna göre aşağıdakilerin hangisi en uzun kenardır?

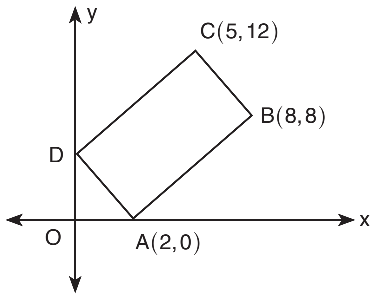
A) [AB] B) [BC] C) [CD] D) [DE] E) [EA]

7. $A(a,4)$ ve $B(6,9)$ noktaları arasındaki uzaklık 13 br ise a nın alabileceği değerler kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-6,8\}$ B) $\{-6,-2\}$ C) $\{-2,18\}$ D) $\{-6,18\}$ E) $\{-8,8\}$

8. Analitik düzlemde ABCD dikdörtgeni çizilmiştir.
$A(2,0)$, $B(8,8)$ ve $C(5,12)$ olmak üzere $A(ABCD)$ kaç br^{2}dir?

A) 30 B) 40 C) 50
D) 60 E) 80



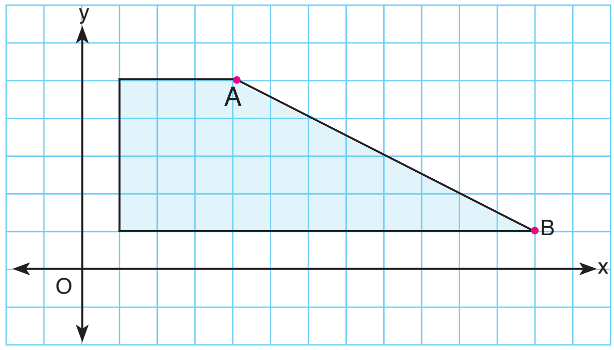
9. A(2,3) ve B(1, −2) olmak üzere y ekseni üzerinde bulunan A ve B noktalarına eşit uzaklıktaki noktanın ordinatı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) 1

10. Yandaki kareli zeminde koordinat sistemine bir engelli rampası modellenmiştir. Her karenin bir kenarının uzunluğu 1 br olduğuna göre

a) A ve B noktalarının koordinatlarını bulunuz.

b) $|AB|$ nu bulunuz.



2.1.2. Bir Doğru Parçasını Belli Bir Oranda (İçten veya Dıştan) Bölen Noktanın Koordinatları

İçten Bölen Noktanın Koordinatları

Bilgi

$C \in [AB]$ ve $\frac{|AC|}{|CB|} = k$ ise C noktasına [**AB**] **nı k oranında içten bölen nokta** denir.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ olmak üzere [AB] nı k oranında içten bölen nokta $C(x_k, y_k)$ noktası için

$\frac{|AC|}{|CB|} = k, k \in \mathbb{R}^+$ verilsin.

$\widehat{ADC} \sim \widehat{CFB}$ dir. (A.A. benzerlik kuralı)

$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AD|}{|CF|} = k$ ve $|AD| = x_k - x_1, |CF| = x_2 - x_k$ olduğundan

$\frac{x_k - x_1}{x_2 - x_k} = k$ (içler dışlar çarpımı yapılırsa)

$x_k - x_1 = kx_2 - kx_k \Rightarrow x_k + kx_k = x_1 + kx_2$

$x_k(1+k) = x_1 + kx_2 \Rightarrow x_k = \frac{x_1 + kx_2}{1+k}$ olur.

Diğer yandan $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|CD|}{|BF|} = k$ ve

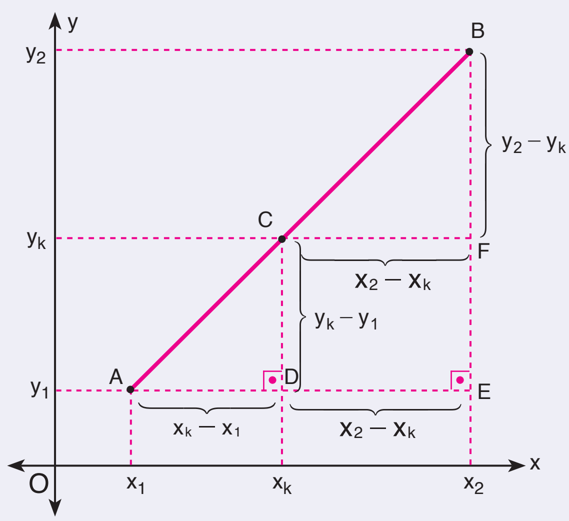
$|CD| = y_k - y_1, |BF| = y_2 - y_k$ olduğundan

$\frac{y_k - y_1}{y_2 - y_k} = k$ (içler dışlar çarpımı yapılırsa)

$y_k - y_1 = ky_2 - ky_k \Rightarrow y_k + ky_k = y_1 + ky_2$

$y_k(1+k) = y_1 + ky_2 \Rightarrow y_k = \frac{y_1 + ky_2}{1+k}$ olur.

Buradan $C(x_k, y_k) = C\left(\frac{x_1 + kx_2}{1+k}, \frac{y_1 + ky_2}{1+k}\right)$ bulunur.



Örnek

A(1,2) ve B(4, – 4) olmak üzere $C \in [AB]$ ve $\frac{|AC|}{|CB|} = 2$ ise C noktasının koordinatlarını bulalım.

Çözüm

I. Yol: $C \in [AB]$ olduğundan C noktası, [AB] nı içten bölen noktadır.

$\frac{|AC|}{|CB|} = 2$ olduğundan k = 2 olur.

$C(x_k, y_k)$ dersek $x_k = \frac{x_1 + kx_2}{1+k} = \frac{1+2\cdot 4}{1+2} = \frac{9}{3} = 3$

$y_k = \frac{y_1 + ky_2}{1+k} = \frac{2+2\cdot(-4)}{1+2} = \frac{-6}{3} = -2$ olur. O hâlde

$C(x_k, y_k) = C(3, -2)$ bulunur.

II. Yol: $C \in [AB]$ ve $\frac{|AC|}{|CB|} = 2$ olduğundan |AC| = 2k dersek |CB| = k olur.



|AC| = 2k, |CB| = k olduğundan |AB| = 3k olur.

A’dan B’ye 3k birimde B’nin apsisi 3 artmıştır (1 den 4 e).

Öyleyse A’dan C’ye 2k birimde 2 artar. Buradan $x_k = 1 + 2 = 3$ olur.

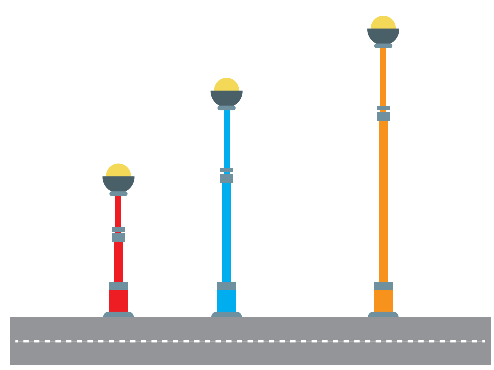
A’dan B’ye 3k birimde B’nin ordinatı 6 azalmıştır (2 den -4 e). O hâlde A’dan C’ye 2k birimde C’nin ordinatı 4 azalır. Buradan $y_k = 2 - 4 = -2$ olur. $C(x_k, y_k) = C(3, -2)$ bulunur.

Örnek

Yandaki şekilde bir yolda verilen üç farklı direk ile ilgili olarak aşağıdakiler biliniyor.

- Kırmızı ve turuncu direklerin analitik düzlemdeki koordinatları (–3, 0) ve (7, –5) tir.
- Mavi direğin; kırmızı direğe olan uzaklığının 3 katı, turuncu direğe olan uzaklığının 2 katına eşittir.

Buna göre mavi direğin koordinatlarını bulalım.



Çözüm

Direklerin bulundukları noktaları A, B ve C olarak alalım.

$A(-3,0)$ ve $C(7,-5)$ olur. $B(x_k, y_k)$ olsun.

Mavi direğin; kırmızı direğe olan uzaklığının 3 katı $3\cdot|AB|$, turuncu direğe olan uzaklığının 2 katı $2\cdot|BC|$ olur.

Bu uzunluklar eşit olduğundan

$3\cdot|AB| = 2\cdot|BC|$ olur.

Buradan $|AB| = 2k$ ve $|BC| = 3k$ yazılabilir.

A dan C ye 5k birimde C nin apsisi 10 birim artmıştır.

A dan B ye 2k birimde B nin apsisi 4 birim artar.

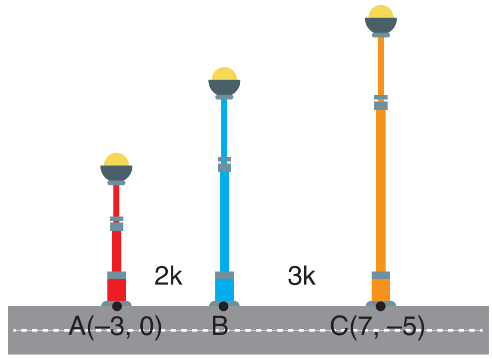
Buradan $x_k = -3 + 4 = 1$ olur.

A dan C ye 5k birimde C nin ordinatı 5 birim azalmıştır.

A dan B ye 2k birimde B nin ordinatı 2 birim azalır.

Buradan $y_k = 0 - 2 = -2$ olur.

$C(x_k, y_k) = C(1,-2)$ bulunur.



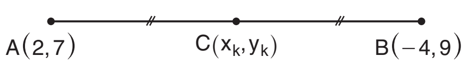
Örnek

$A(2,7)$ ve $B(-4,9)$ noktaları veriliyor. $C \in [AB]$ ve $|AC| = |BC|$ olmak üzere C noktasının koordinatlarını bulalım.

Çözüm

$C \in [AB]$ ve $|AC| = |BC|$ olduğundan $\dfrac{|AC|}{|BC|} = 1$ olur. Buradan C'nin A ile B'nin orta noktası olduğu sonucu çıkar.

$\dfrac{|AC|}{|BC|} = k = 1 \Rightarrow |AC| = |BC|$ olur.



$$x_k = \frac{x_1 + kx_2}{1+k} = \frac{2 + 1\cdot(-4)}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1,$$

$$y_k = \frac{y_1 + kx_2}{1+k} = \frac{7 + 1\cdot 9}{1+1} = \frac{16}{2} = 8 \text{ olduğundan } C(-1,8) \text{ bulunur.}$$

Bilgi

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ olmak üzere $C(a, b)$ noktası $[AB]$ nın orta noktası ise

$a = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ ve $b = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ olur.

Örnek

$A(4, 2)$ ve $B(-8, 10)$ noktalarının orta noktasının koordinatlarını bulalım.

Çözüm

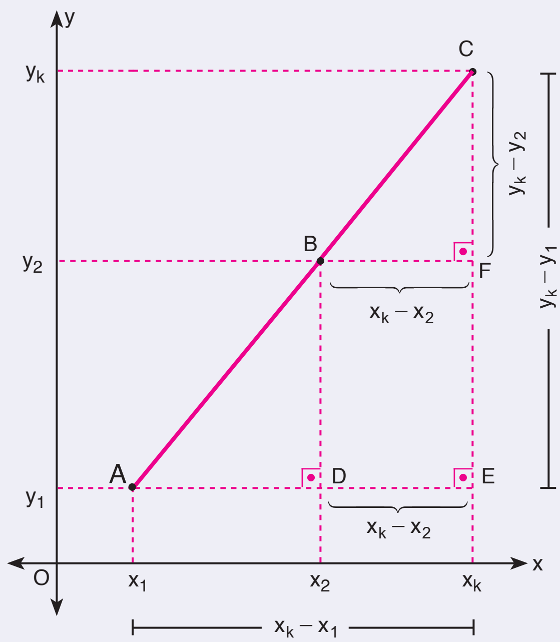
$A(4, 2)$ ile $B(-8, 10)$

$a = \dfrac{4 + (-8)}{2} = \dfrac{4 - 8}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2, \quad b = \dfrac{2 + 10}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$'dır. Orta nokta $C(-2, 6)$ olur.

Dıştan Bölen Noktanın Koordinatları

Bilgi

$C \notin [AB]$ olmak üzere AB doğrusu üzerindeki C noktası için $\dfrac{|CA|}{|CB|} = k$ ise C noktasına **[AB] nı k oranında dıştan bölen nokta** denir.



$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ noktaları ve $[AB]$ nı k oranında dıştan bölen $C(x_k, y_k)$ noktası için

$\dfrac{|CA|}{|CB|} = k, \ k \in \mathbb{R}^+$ verilsin

$\widehat{CAE} \sim \widehat{CBF}$ dir. (A.A. benzerlik kuralı)

$\dfrac{|CA|}{|CB|} = \dfrac{|AE|}{|BF|} = k$

$\dfrac{x_k - x_1}{x_k - x_2} = k$ (içler dışlar çarpımı yapılırsa)

$x_k - x_1 = kx_k - kx_2 \Rightarrow x_k - kx_k = x_1 - kx_2$

$x_k(1 - k) = x_1 - kx_2 \Rightarrow x_k = \dfrac{x_1 - kx_2}{1 - k}$ olur.

Benzer şekilde $\dfrac{|CA|}{|CB|} = \dfrac{|CE|}{|CF|} = k$

$\dfrac{y_k - y_1}{y_k - y_2} = k$ (içler dışlar çarpımı yapılırsa)

$y_k - y_1 = ky_k - ky_2 \Rightarrow y_k - ky_k = y_1 - ky_2$

$y_k(1 - k) = y_1 - ky_2 \Rightarrow y_k = \dfrac{y_1 - ky_2}{1 - k}$ olur.

O hâlde $C \notin [AB]$ ve $\dfrac{|CA|}{|CB|} = k$ ise $C(x_k, y_k) = C\left(\dfrac{x_1 - kx_2}{1 - k}, \dfrac{y_1 - ky_2}{1 - k}\right)$ bulunur.

Örnek

$A(1,2)$, $B(2,0)$, $C\notin[AB]$, $B\in[AC]$ ve $|AC|=2|BC|$ olmak üzere A, B, C doğrusal noktaları veriliyor. C noktasının koordinatlarını bulalım.

Çözüm

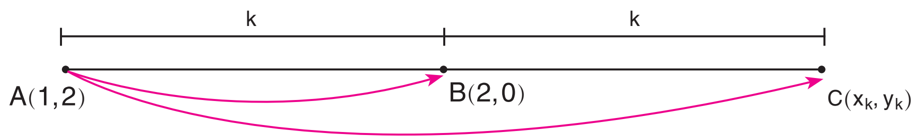
I. Yol: $C\notin[AB]$ olduğundan C noktası $[AB]$ nı dıştan bölen noktadır.

$|AC|=2|BC|$ ise $\dfrac{|AC|}{|BC|}=2$ olduğundan $k=2$ dir. $C(x_k,y_k)$ olsun. O hâlde

$$x_k=\frac{x_1-kx_2}{1-k}=\frac{1-2\cdot2}{1-2}=\frac{-3}{-1}=3$$

$$y_k=\frac{y_1-ky_2}{1-k}=\frac{2-2\cdot0}{1-2}=\frac{2}{-1}=-2$$ olur. O hâlde $C(x_k,y_k)=C(3,-2)$ bulunur.

II. Yol: $C\notin[AB]$ ve $|AC|=2|BC|$ olduğundan $|BC|=k$ dersek $|AC|=2k$ olur.



A'dan B'ye k birimde B'nin apsisi 1 artmıştır (1'den 2'ye).

O hâlde A'dan C'ye 2k birimde C'nin apsisi 2 artar. $x_k=1+2=3$ olur.

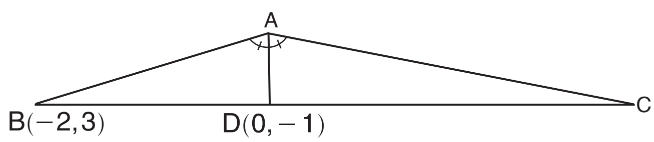
A'dan B'ye k birimde B'nin ordinatı 2 azalmıştır (2'den 0'a).

O hâlde A'dan C'ye 2k birimde C'nin ordinatı 4 azalır. $y_k=2-4=-2$ olur.

Buradan $C(x_k,y_k)=C(3,-2)$ bulunur.

Örnek

ABC üçgeninde $[AD]$ açıortaydır. $B(-2,3)$, $D(0,-1)$ ve $\dfrac{|AB|}{|AC|}=\dfrac{2}{3}$ ise C noktasının koordinatlarını bulalım.



Çözüm

I. Yol: $[AD]$ açıortay ve $\dfrac{|AB|}{|AC|}=\dfrac{2}{3}$ olduğundan $\dfrac{|BD|}{|DC|}=\dfrac{2}{3}$ (iç açıortay teoremi)

$|BD|=2k$, $|DC|=3k$ dersek $\dfrac{|BC|}{|DC|}=\dfrac{5k}{3k}=\dfrac{5}{3}$ olur.

$C\notin[BD]$ olduğundan C noktası $[BD]$ nı $\dfrac{5}{3}$ oranında dıştan bölen noktadır.

$C(x_k,y_k)$ dersek $B(-2,3)$, $D(0,-1)$ olduğundan

$$x_k=\frac{x_1-kx_2}{1-k}=\frac{-2-\frac{5}{3}\cdot0}{1-\frac{5}{3}}=\frac{-2}{\frac{-2}{3}}=-2\cdot\frac{3}{-2}=3$$

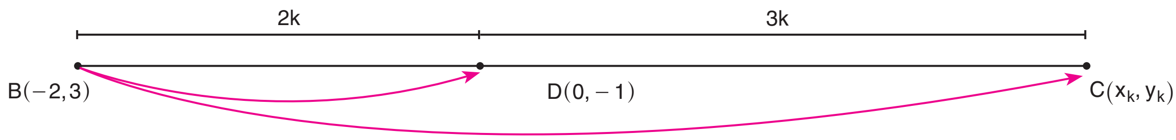
$$y_k=\frac{y_1-ky_2}{1-k}=\frac{3-\frac{5}{3}(-1)}{1-\frac{5}{3}}=\frac{3+\frac{5}{3}}{-\frac{2}{3}}=\frac{14}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-7$$ olur.

O hâlde $C(x_k,y_k)=C(3,-7)$ bulunur.

II. Yol:

$[AD]$ açıortay ve $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{2}{3}$ olduğundan $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{2}{3}$'tür.

$|BD| = 2k$ dersek $|DC| = 3k$ ve $|BC| = 5k$ olur.



B'den D'ye 2k birimde D'nin apsisi 2 artmıştır (–2'den 0'a). O hâlde B den C'ye 5k birimde, C'nin apsisi 5 artar. $x_k = -2 + 5 = 3$ olur.

B'den D'ye 2k birimde D'nin ordinatı 4 azalmıştır (3'ten –1'e).

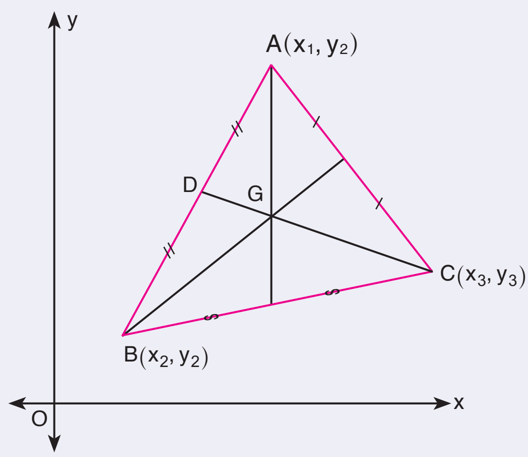
O hâlde B'den C'ye 5k birimde C'nin ordinatı 10 azalır.

$y_k = 3 - 10 = -7$ olur. Yani $C(x_k, y_k) = C(3, \ -7)$ bulunur.

Üçgenin Ağırlık Merkezinin Koordinatları

Bilgi

G noktası, köşe koordinatları $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ olan $\widehat{ABC}$ nin kenarortaylarının kesim noktası olduğu için ağırlık merkezidir.



Bu noktanın koordinatlarını bulalım.

D noktası $[AB]$ nın orta noktasıdır.

$D(x_D, y_D)$ dersek $x_D = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$y_D = \frac{y_1 + y_2}{2}$ olur.

G (ağırlık merkezi) noktasının koordinatları $G(x_G, y_G)$ olsun. Kenarortayların kesim noktası olan G noktası herhangi bir köşeye 2 birim, o köşenin karşısındaki kenara ise 1 birim uzaklıktadır.

$[CD]$ kenarortayı için $G \in [CD]$ ve $\frac{|GC|}{|GD|} = 2$ olduğundan G noktası $[CD]$ nı 2 oranında içten böler. O hâlde

$$G(x_G, y_G) \text{ için } x_G = \frac{x_3 + 2x_D}{1 + 2} = \frac{x_3 + 2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y_G = \frac{y_3 + 2y_D}{1 + 2} = \frac{y_3 + 2\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)}{3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \text{ olur.}$$

Yani $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ olmak üzere

$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$, $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezidir.

Örnek

Köşe koordinatları $A(1,5)$, $B(-4,2)$, $C(-3,8)$ olan $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezinin koordinatlarını bulalım.

Çözüm

$\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezine $G(x_G, x_G)$ dersek

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{1 + (-4) + (-3)}{3} = \frac{1 - 4 - 3}{3} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{5 + 2 + 8}{3} = \frac{15}{3} = 5 \text{ olur. O hâlde}$$

$G(x_G, y_G) = G(-2,5)$ bulunur.

Örnek

Köşe koordinatları $A(1,5)$, $B(a,b)$, $C(-2,4)$ olan $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezi $G(1,4)$ noktası olduğuna göre $B(a,b)$ noktasının orijine uzaklığını bulalım.

Çözüm

Verilen üçgenin ağırlık merkezi G noktasıdır.

$$G(1,4) = G\left(\frac{x_1 + x_2 + 3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 1$$

$$\frac{1 + a + (-2)}{3} = 1$$

$$\frac{a - 1}{3} = 1 \Rightarrow a - 1 = 3 \Rightarrow a = 4 \text{ olur.}$$

$$\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = 4$$

$$\frac{5 + b + 4}{3} = 4$$

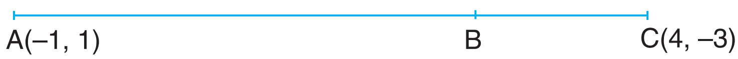
$b + 9 = 12 \Rightarrow b = 3$ olur.

$B(4,3)$ ise $|OB| = \sqrt{4^2 + 3^2}$ br

$= \sqrt{16 + 9} = 5$ br bulunur.

Alıştırmalar 2-2

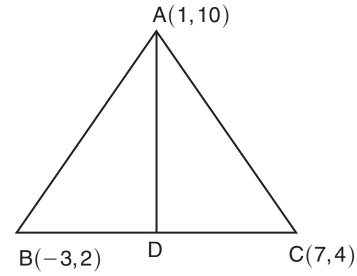
1.



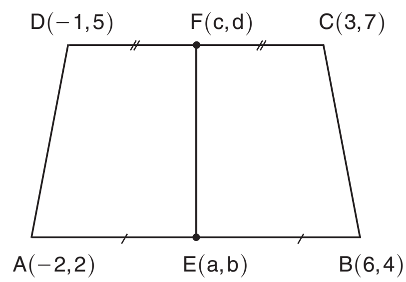
Yukarıdaki şekilde $B \in [AC]$ ve $|AB| = 3|BC|$ olduğuna göre B noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left(\frac{11}{4}, -2\right)$ B) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ C) $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{2}\right)$ D) $\left(\frac{3}{4}, -\frac{11}{2}\right)$ E) $\left(0, \frac{5}{4}\right)$

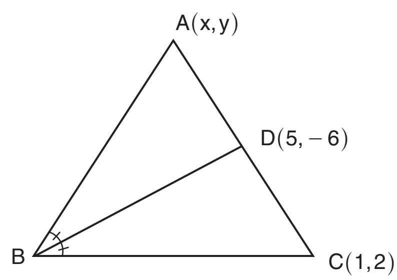
2. Şekildeki ABC üçgeninin köşe koordinatları $A(1,10)$, $B(-3,2)$ ve $C(7,4)$ noktalarıdır. $[AD]$, BC kenarına ait kenarortay ise $|AD|$ nun kaç br olduğunu bulunuz.



3. Şekildeki ABCD dörtgeninin köşe koordinatları $A(-2,2)$, $B(6,4)$, $C(3,7)$, $D(-1,5)$ noktalarıdır.
$E(a,b)$, $[AB]$ nın orta noktası;
$F(c,d)$, $[CD]$ nın orta noktası ise
$|EF|$ nun kaç br olduğunu bulunuz.



4. Şekildeki $\widehat{ABC}$ nde $[BD]$ açıortay, $A(x,y)$, $C(1,2)$, $D(5,-6)$, $\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{4}{3}$ ise $x + y$ değerini bulunuz.



5. Aslı ve Tarkan dik koordinat sistemi biçiminde modellenmiş bir alanda sırasıyla $A(-1,2)$, $B(3,4)$ noktalarında durmaktadır. Aslı ve Tarkan aynı anda ve aynı hızla birbirlerine doğru yürümeye başlıyorlar.
Buna göre karşılaştıkları noktanın apsis ve ordinatı toplamı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

6. Köşe koordinatları $A(3,4)$, $B(-2,1)$, $C(a,b)$ olan $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezinin koordinatları $G(-1,3)$ olduğuna göre $a \cdot b$'nin değerini bulunuz.

7. $A(-1,1)$, $B(-9,9)$, A, B, C doğrusal noktaları için $C \in [AB]$, $3|AC| = |BC|$ ise C noktasının koordinatlarının çarpımı kaçtır?

A) – 9 B) – 6 C) – 4 D) – 3 E) – 1

8.



Yukarıdaki şekilde $A(1,2)$, $B(-1,6)$, A, B, C doğrusal noktaları için $C \notin [AB]$ ve $3|AB| = 2|BC|$ ise C noktasının koordinatları toplamı kaçtır?

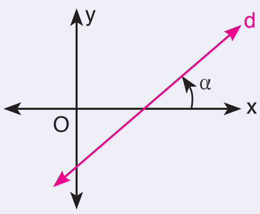
A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

2.1.3. Analitik Düzlemde Doğrular

Bir Doğrunun Eğim Açısı ve Eğimi

Bilgi

Bir d doğrusunun x ekseni ile pozitif yönde oluşturduğu açıya, **d doğrusunun eğim açısı**, eğim açısının tanjant değerine de **bu doğrunun eğimi** denir. Eğim genellikle m harfi ile gösterilir.

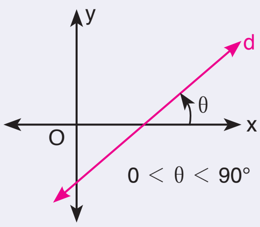


Bir doğrunun eğim açısı α ise

$m = \tan\alpha$ dır.

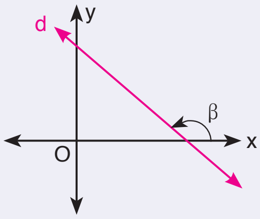
Bir doğrunun x ekseni ile yaptığı pozitif yönlü açı dar açı ise eğimi pozitiftir.

$0 < \theta < 90°$ ise $m = \tan\theta > 0$ dır.



Bir doğrunun x ekseni ile yaptığı pozitif yönlü açı geniş açı ise eğim negatiftir.

$90° < \beta < 180°$ ise $m = \tan\beta < 0$ dır.



Örnek

Bir d doğrusu x ekseniyle pozitif yönde 30°lik açı meydana getirmiştir. Buna göre bu doğrunun eğimini bulalım.

Çözüm

Verilen d doğrusunun eğim açısı 30°dir. O hâlde d doğrusunun eğimi,

$m = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ olur.

Örnek

Bir d doğrusu x ekseniyle pozitif yönde 120°lik açı meydana getirmiştir. Buna göre bu doğrunun eğimini bulalım.

Çözüm

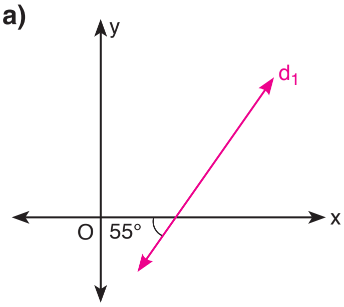
Verilen d doğrusunun eğim açısı 120°dir. O hâlde d doğrusunun eğimi,

$m = \tan 120° = \tan(180° - 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$ bulunur.

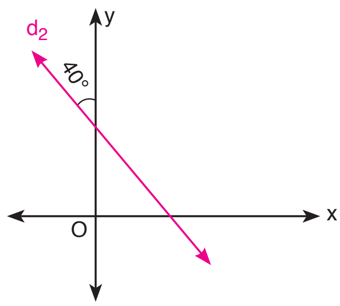
Örnek

Aşağıda verilen doğruların eğim açılarını bulalım.

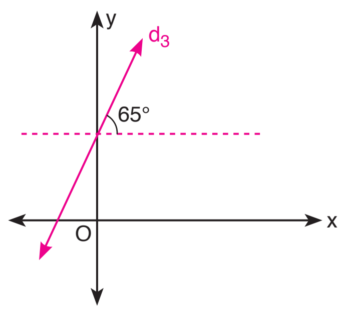
a)



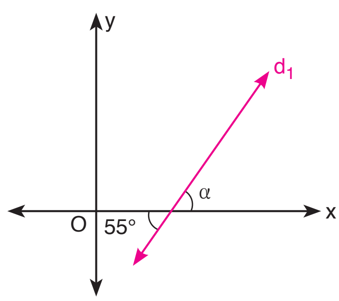
b)



c)



Çözüm



a) İç ters açılar birbirine eşittir.

O hâlde $\alpha = 55°$dir.

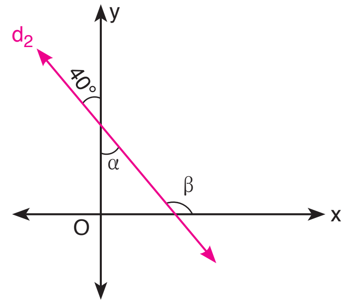
O hâlde d_1 doğrusunun eğim açısı 55° bulunur.

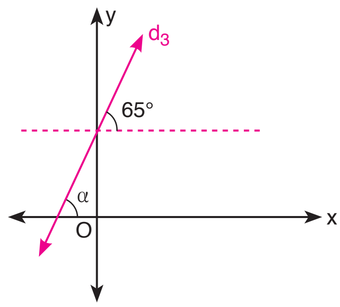
b) İç ters açılar birbirine eşit olduğundan $\alpha = 40°$ olur.

Bir üçgende iki iç açının toplamı, kendisine komşu olmayan bir dış açıya eşit olduğundan

$\beta = \alpha + 90° = 40° + 90° = 130°$dir.

O hâlde d_2 doğrusunun eğim açısı 130° bulunur.



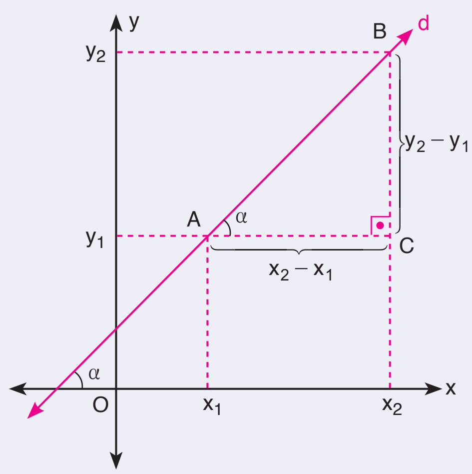


c) Yöndeş açılar birbirine eşit olduğundan $\alpha = 65°$ olur.

Buradan d_3 doğrusunun eğim açısı 65° bulunur.

Bilgi

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$'dir.



Bu eşitliğin doğru olduğunu gösterelim.

Bir d doğrusu üzerindeki iki nokta $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ olsun.

d doğrusunun eğim açısı α ise

d doğrusunun eğimi $m = \tan\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ olur.

d doğrusunun eğim açısı α olduğundan $m(\widehat{BAC}) = \alpha$ olur (yöndeş açı).

BAC dik üçgeninde $|AC| = x_2 - x_1$, $|BC| = y_2 - y_1$ olur.

$$m = \tan\alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}} = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ bulunur.}$$

Örnek

Analitik düzlemde $A(2,6)$ ve $B(8,10)$ noktalarından geçen d doğrusunun eğimini bulalım.

Çözüm

d doğrusunun eğim açısı m olsun.

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ olduğundan

$m = \dfrac{10-6}{8-2} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ bulunur.

Örnek

x ekseniyle pozitif yönde 135°lik açı yapan d doğrusu $A(a,4)$, $B(-2,-2)$ noktalarından geçtiğine göre a nın kaç olduğunu bulalım.

Çözüm

d doğrusunun eğim açısı 135°dir. Buradan $m = \tan 135° = -\tan 45° = -1$ olur.

d doğrusu $A(a,4)$ ve $B(-2,-2)$ den geçtiğine göre $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1$ olur. O hâlde

$\dfrac{-2-4}{-2-a} = -1$ ise $a + 2 = -6$

$a = -8$ bulunur.

Örnek

Bir d doğrusu $C(2,a)$, $D(6,7)$ noktalarından geçmektedir. Bu iki noktadan geçen doğrunun eğimi $-\dfrac{3}{2}$ olduğuna göre a nın değerini bulalım.

Çözüm

İki noktadan geçen doğrunun eğimi

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \dfrac{7-a}{4} = -\dfrac{3}{2}$

$14 - 2a = -12$

$-2a = -26$

$a = 13$ bulunur.

İki Doğrunun Parelelliği

Bilgi

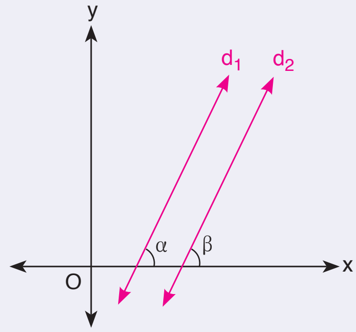
İki doğru birbirine paralel ise eğimleri eşittir ya da eğimleri eşit doğrular birbirine paraleldir.

$d_1 \parallel d_2$ ise $m_{d_1} = m_{d_2} \Leftrightarrow m_{d_1} = m_{d_2}$ ise $d_1 \parallel d_2$

Bu ifadenin doğru olduğunu gösterelim.

d_1 ve d_2 doğruları birbirine paralel verilsin. d_1 doğrusunun eğim açısı α, d_2 doğrusunun eğim açısı β olsun.

d_1 ve d_2 doğruları birbirine paralel ise α ile β açıları yöndeş açılar olur. Bu durumda $\alpha = \beta$ dır (Yöndeş açıların ölçüleri birbirine eşittir.).



$m_1 = \tan\alpha$, $m_2 = \tan\beta$ ve $\alpha = \beta$ olduğundan $\tan\alpha = \tan\beta \Rightarrow m_1 = m_2$ olur.

Örnek

Bir d_1 doğrusu $A(-1,4), B(1,7)$ ve bir d_2 doğrusu $C(a,3), D(4,6)$ noktalarından geçmektedir. $d_1 // d_2$ olduğuna göre a değerini bulalım.

Çözüm

$d_1 // d_2$ ise doğruların eğimleri eşittir.

$m_1 = \dfrac{7-4}{1-(-1)} = \dfrac{3}{1+1} = \dfrac{3}{2} ...(1)$

$m_2 = \dfrac{6-3}{4-a} = \dfrac{3}{4-a} ...(2)$ olur. (1) ve (2) eşitliklerinden

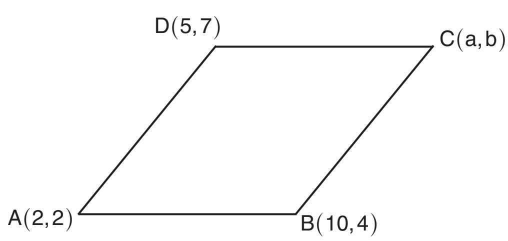
$\dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{4-a} \Rightarrow 12 - 3a = 6$

$-3a = -6$

$a = 2$ bulunur.

Örnek

Paralelkenarın köşe koordinatları yanda verilmiştir. $C(a,b)$ ve $a + b = 22$ olduğuna göre $b - a$'nın değerini bulalım.



Çözüm

ABCD parelelkenar olduğundan $[AB]//[DC]$ olur.

O hâlde $m_{AB} = m_{DC} \Rightarrow \dfrac{4-2}{10-2} = \dfrac{b-7}{a-5}$

$$\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{8}_{4}} = \frac{b-7}{a-5}$$

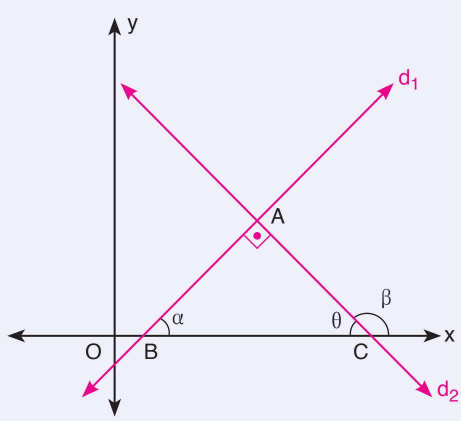
$$4b - 28 = a - 5 \Rightarrow 4b - a = 23 \text{ olur.}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{a} + b = 22 \\ + \; 4b - \cancel{a} = 23 \\ \hline 5b = 45 \Rightarrow b = 9 \text{ olur.} \end{array}$$

$b = 9$ için $a + 9 = 22 \Rightarrow a = 13$ olur. Buradan $b - a = 9 - 13 = -4$ bulunur.

İki Doğrunun Dikliği

Bilgi



• Birbirine dik doğruların eğimleri çarpımı –1'dir. d_1 doğrusunun eğimi m_1, d_2 doğrusunun eğimi m_2 olmak üzere

$d_1 \perp d_2$ ise $m_1 \cdot m_2 = -1$'dir.

• Eğimleri çarpımı –1 olan doğrular birbirine diktir.

Bu ifadelerin doğru olduğunu gösterelim.

Analitik düzlemde $d_1 \perp d_2$ doğruları şekildeki gibi verilsin. d_1 doğrusunun eğim açısı α ve eğimi m_1, d_2 doğrusunun eğim açısı β ve eğimi m_2 ve $m(\widehat{ACB}) = \theta$ olsun. ABC dik üçgeninde

$m_1 = \tan\alpha = \dfrac{|AC|}{|AB|}$ dir. .....(1),

$m_2 = \tan\beta = -\tan\theta = -\dfrac{|AB|}{|AC|}$.....(2) olur. (Birbirini 180° dereceye tamamlayan açıların birinin tanjantı, diğerinin (–) işaretlisine eşittir.)

(1) ve (2) eşitliklerinden $d_1 \perp d_2$ ise $m_1 \cdot m_2 = \dfrac{|AC|}{|AB|} \cdot \left(-\dfrac{|AB|}{|AC|}\right) = -1$ olur.

d_1 ve d_2 doğrularının eğimleri çarpımı -1 ise $d_1 \perp d_2$ dir.

Örnek

ABC üçgeninin köşe koordinatları $A(3,7)$, $B(-1,a)$ ve $C(3,-1)$ dir.

ABC üçgeninde $m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$ olduğuna göre a nın kaç olduğunu bulalım.

Çözüm

ABC üçgeninde $m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$ olduğundan $[AB] \perp [BC]$ dır.

$[AB] \perp [BC]$ ise AB ve BC doğrularının eğimleri çarpımı – 1 olmalıdır.

AB doğrusunun eğimine m_1, BC doğrusunun eğimine m_2 dersek

$$m_1 = \frac{a-7}{-1-3} = \frac{a-7}{-4} \text{ ve } m_2 = \frac{-1-a}{3-(-1)} = \frac{-1-a}{4} \text{ ise}$$

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{(a-7)}{-4} \cdot \frac{(-1-a)}{4} = \frac{-a+7-a^2+7a}{-16} = -1 \Rightarrow -a^2+6a+7 = 16$$

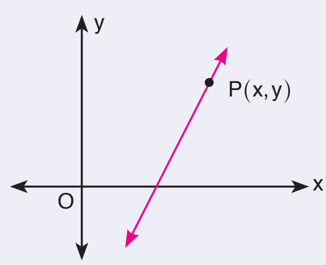
$$-a^2+6a-9=0 \Rightarrow a^2-6a+9=0 \text{ ise } (a-3)^2 = 0 \text{ ise } a = 3 \text{ bulunur.}$$

Doğru Denklemleri

Bilgi

Analitik düzlemde verilen d doğrusunun üzerinde sonsuz nokta vardır. d doğrusuna ait $P(x,y)$ noktasının doğru üzerindeki yeri değiştikçe koordinatları da değişir.

Değişken $P(x,y)$ noktasının koordinatları arasındaki bağıntıya **d doğrusunun denklemi** denir.



Bir Noktası ve Eğimi Bilinen Doğru Denklemi

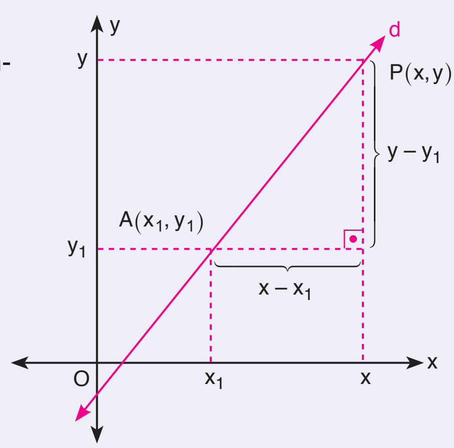
Bilgi

$A(x_1, y_1)$ doğru üzerinde bir nokta ve $P(x,y)$ doğru üzerinde değişken bir nokta olmak üzere

d doğrusunun eğimi,

$m = \dfrac{y-y_1}{x-x_1}$ ise $y - y_1 = m(x-x_1)$ dir. Buradan

$A(x_1, y_1)$ noktasından geçen ve eğimi m olan doğrunun denklemi $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$ dir.



Örnek

Koordinat düzleminde $A(2,6)$ noktasından geçen ve eğimi 4 olan doğrunun denklemini bulalım.

Çözüm

Eğimi m ve geçtiği bir nokta $A(x_1, y_1)$ olan doğrunun denklemi,

$y - y_1 = m(x - x_1)$ olduğundan

$y - 6 = 4(x - 2)$

$y - 6 = 4x - 8$

$y = 4x - 2$ bulunur.

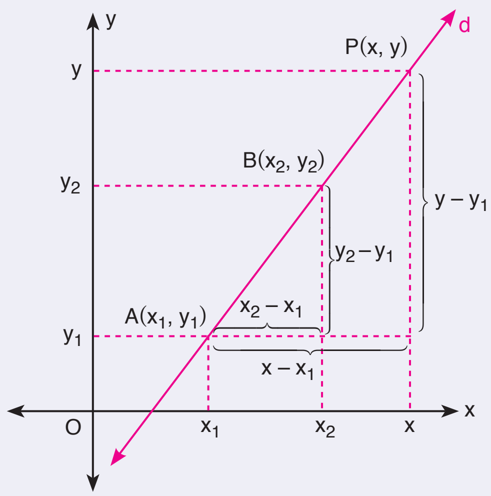
Bilgi

Verilen bir d doğrusunun denklemi $y = mx + n$ biçiminde ise x in katsayısı olan m, doğrunun eğimidir.

İki Noktası Bilinen Doğru Denklemi

Bilgi

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi, $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ dir.



Bu eşitliğin doğru olduğunu gösterelim.

$P(x, y)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ noktaları aynı d doğrusu üzerinde olsun. A ve P noktalarından geçen doğru A ve B noktalarından geçen doğru aynı doğrudur. Bu nedenle

$m_{AP} = m_{AB}$ olacağından $m_{AP} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ ve $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ olur. Buradan

$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ bulunur.

Örnek

$A(2,4)$, $B(-2,-8)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulalım.

Çözüm

I. Yol: $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi,

$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ olduğundan

$$\frac{y-4}{x-2}=\frac{-8-4}{-2-2}$$

$$\frac{y-4}{x-2}=\frac{-12}{-4}$$

$\frac{y-4}{x-2}=3 \Rightarrow y-4=3x-6 \Rightarrow y=3x-2$ bulunur.

II. Yol: $A(2,4)$, $B(-2,-8)$ aynı doğru üzerinde olduğundan doğrunun eğimini bulabiliriz.

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ olduğundan $m=\frac{-8-4}{-2-2}=\frac{-12}{-4}=3$'tür.

Şimdi $A(2,4)$, $B(-2,-8)$ noktalarının birini kullanarak eğimi ve bir noktası bilinen doğru denkleminden yararlanalım.

A noktasını kullanalım.

$y-y_1=m(x-x_1)$ olduğundan

$y-4=3(x-2) \Rightarrow y-4=3x-6 \Rightarrow y=3x-2$ bulunur.

Örnek

$A(1,-1)$, $B(5,-3)$, $C(7,-4)$ noktalarının doğrusal olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm

I. Yol: A, B ve C noktaları aynı doğru üzerinde (doğrusal) ise bu noktalardan herhangi ikisinin belirttiği doğru denklemini diğer noktanın koordinatları sağlamalıdır.

$A(1,-1)$ ve $B(5,-3)$ noktalarının belirttiği doğru denklemini yazalım.

$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ise $\frac{y-(-1)}{x-1}=\frac{(-3)-(-1)}{5-1}$

$$\frac{y+1}{x-1}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

$2y+2=-x+1 \Rightarrow 2y=-x-1 \Rightarrow y=\frac{-x-1}{2}$ bulunur.

$C(7,-4)$ noktasının koordinatlarını denklemde yerine yazarsak

$-4=\frac{-7-1}{2} \Rightarrow -4=\frac{-8}{2} \Rightarrow -4=-4$, $C(7,-4)$ noktasının koordinatları denklemi sağladığından A, B ve C noktaları doğrusaldır.

II. Yol: A, B ve C noktaları doğrusal ise AB doğrusunun eğimi m_{AB} ve BC doğrusunun eğimi m_{BC} olmak üzere $m_{AB} = m_{BC}$ olmalıdır.

$m_{AB} = \dfrac{-3-(-1)}{5-1} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$,

$m_{BC} = \dfrac{-4-(-3)}{7-5} = -\dfrac{1}{2}$ olur.

$m_{AB} = m_{BC} = -\dfrac{1}{2}$ olduğundan

A, B ve C noktaları doğrusaldır.

E-İçerik

Örnek

$O(0,0)$, $A(2,6)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulalım.

Çözüm

İki noktası bilinen doğru denkleminden

$\dfrac{y-y_1}{x-x_1} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$\dfrac{y-0}{x-0} = \dfrac{6-0}{2-0}$

$\dfrac{y}{x} = \dfrac{6}{2}$ olur.

Buradan y = 3x bulunur.

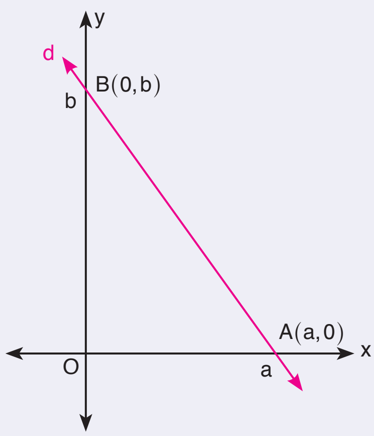
Koordinat Eksenlerini Kestiği Noktaları Bilinen Doğru Denklemi

Bilgi

$a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olmak üzere $A(a,0)$, $B(0,b)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi,

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$'dir.

Bu eşitliğin doğru olduğunu gösterelim.



Geçtiği iki noktası $A(a,0)$ ve $B(0,b)$ olan d doğrusunun denklemi,

$\dfrac{y-y_1}{x-x_1} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ olduğundan

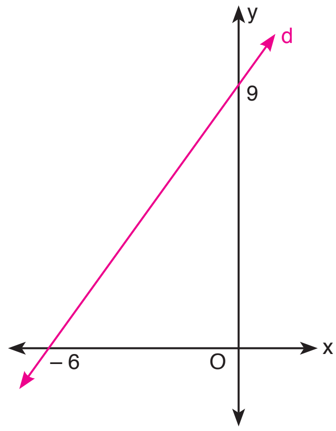
$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$ olur (İçler, dışlar yer değiştirebilir.). O hâlde

$\dfrac{y-0}{b-0} = \dfrac{x-a}{0-a}$ ise $\dfrac{y}{b} = \dfrac{x}{-a} - \dfrac{a}{-a}$

$\dfrac{y}{b} = -\dfrac{x}{a} + 1$ ise $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ elde edilir.

Örnek

Yanda, d doğrusunun grafiği verilmiştir. $A(-2,k)$ noktası, d doğrusunun üzerinde ise k yı bulalım.



Çözüm

d doğrusunun eksenleri kestiği noktalar belli olduğundan denklemini bulabiliriz.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \text{ ise } \underset{(-6)}{\frac{x}{-6}}+\underset{(4)}{\frac{y}{9}}=1$$

$$\frac{-6x}{36}+\frac{4y}{36}=1$$

$$\frac{-6x+4y}{36}=1$$

$$-6x+4y=36$$

$$4y=6x+36$$

$$y=\frac{6}{4}x+\frac{36}{4}$$

$$y=\frac{3}{2}x+9 \text{ olur.}$$

$A(-2,k)$ noktası, d doğrusunun üzerinde olduğundan $A(-2,k)$ nın koordinatları denklemi sağlamalıdır. O hâlde $y=\frac{3}{2}x+9$ ise $k=\frac{3}{2}(-2)+9$

$$k=-3+9$$

$$k=6 \text{ bulunur.}$$

Doğrunun $ax+by+c=0$ Biçimindeki Genel Denklemi

Bilgi

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve a ile b den en az biri sıfırdan farklı olmak üzere $ax+by+c=0$ biçimindeki denkleme **doğrunun genel (standart) denklemi** denir.

$ax+by+c=0$ denkleminde y yalnız bırakılırsa

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ elde edilir.

$y=mx+n$ denkleminden yararlanılır.

$m=-\frac{a}{b}$ doğrunun eğimi, $n=-\frac{c}{b}$ ise doğrunun y eksenini kestiği noktanın ordinatıdır.

Örnek

$3x - 9y + 4 = 0$ denklemi veriliyor. Bu denklemin belirttiği doğrunun eğimini bulalım.

Çözüm

I. Yol: $ax + by + c = 0$ denklemi verildiğinde

$m = -\frac{a}{b}$ olduğundan $3x - 9y + 4 = 0$ denkleminde

$a = 3$

$b = -9$ olur. O hâlde $m = -\frac{3}{-9} = \frac{1}{3}$ bulunur.

II. Yol: $ax + by + c = 0$ biçimindeki denklemi $y = mx + n$ biçimine dönüştürürsek x in katsayısı eğimi verir. O hâlde $3x - 9y + 4 = 0$ denkleminde y yi yalnız bırakalım.

$3x - 9y + 4 = 0$ ise

$$-9y = -3x - 4$$

$$y = \frac{-3}{-9}x - \frac{4}{-9}$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}$$ olur. Buradan $m = \frac{1}{3}$ bulunur.

Örnek

$ax + by - 5 = 0$ denkleminin belirttiği doğrunun eğimi 3'tür. Bu doğru $A(2, 1)$ noktasından geçtiğine göre a + b'nin değerini bulalım.

Çözüm

$ax + by - 5 = 0$ doğrusunun eğimi 3 olduğundan $m = -\frac{a}{b} = 3$ ise $a = -3b$ olur. a yerine – 3b yazarsak $-3bx + by - 5 = 0$ olur. Doğru $A(2, 1)$ noktasından geçiyorsa bu noktanın koordinatları denklemi sağlar.

$$-3 \cdot b \cdot 2 + b \cdot 1 - 5 = 0$$

$$-6b + b - 5 = 0$$

$$-5b = 5$$

$b = -1$ olur. $a = -3b$ ise

$a = -3 \cdot (-1) = 3$ olur.

Buradan $a + b = 3 + (-1) = 2$ bulunur.

Eksenlere Paralel Doğruların Denklemi

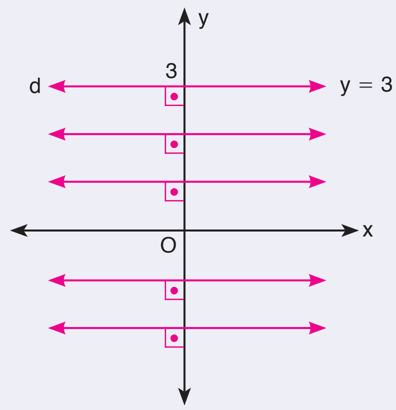
Bilgi

a) x Eksenine Paralel Doğruların Denklemi

y eksenine dik ve x eksenine paralel doğruların genel denklemi $y = b$ şeklinde olup eğimleri sıfırdır.

Yandaki şekilde $y = 3$ denklemine sahip d doğrusu, $A(0, 3)$ noktasında y eksenine dik olup x eksenine paraleldir.

$y = 3$ doğrusunun üzerindeki tüm noktaların ordinatı 3'tür.

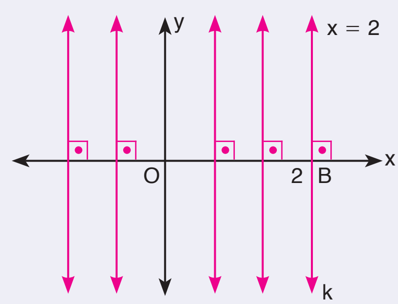


b) y Eksenine Paralel Doğruların Denklemi

x eksenine dik ve y eksenine paralel doğruların genel denklemi $x = a$ şeklinde olup eğimleri tanımsızdır.

Yandaki şekilde $x = 2$ denklemine sahip k doğrusu, $B(0, 2)$ noktasında x eksenine dik olup y eksenine paraleldir.

$x = 2$ doğrusunun üzerindeki tüm noktaların apsisleri 2'dir.



Örnek

$y = 6$, $x = -4$ doğruları ve eksenler arasında kalan bölgenin alanını bulalım.

Çözüm

$y = 6$ doğrusu, x eksenine paraleldir ve bu doğru üzerindeki tüm noktaların ordinatları 6'dır.

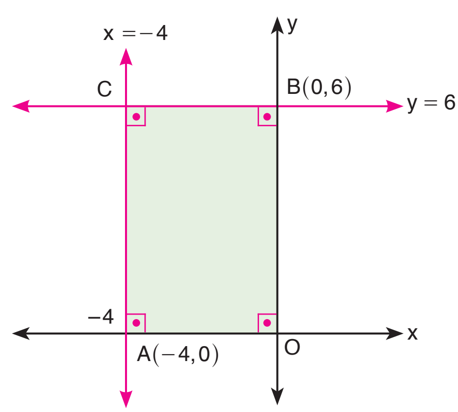
$x = -4$ doğrusu, y eksenine paraleldir ve bu doğru üzerindeki tüm noktaların apsisi -4'tür.

$A(-4, 0)$ olduğundan $|AO| = 4$ br,

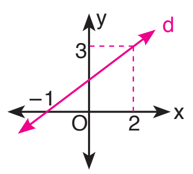
$B(0, 6)$ olduğundan $|BO| = 6$ br olur.

O hâlde eksenler ile $x = -4$, $y = 6$ doğrularının sınırladığı dikdörtgensel bölgenin alanı

$A(AOBC) = |AO| \cdot |BO| = 4 \cdot 6 = 24$ br^2 bulunur.

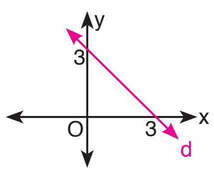


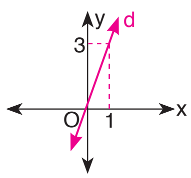
Etkinlik

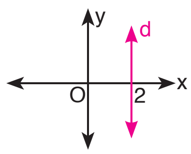
<table>
<tr><td>


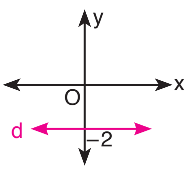
</td><td>
A(2, 3) ve B(−1, 0) noktalarından geçen doğru denklemi

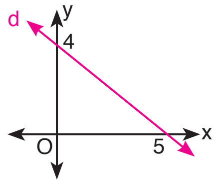
$$\frac{x-(-1)}{-1-2}=\frac{y-0}{0-3}$$

$$y = x + 1$$
</td></tr>
<tr><td>


</td><td></td></tr>
<tr><td>


</td><td></td></tr>
<tr><td>


</td><td></td></tr>
<tr><td>


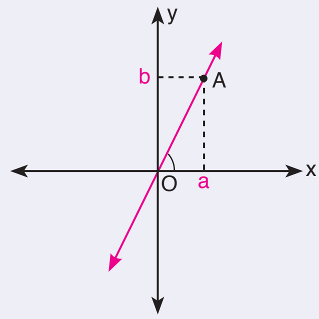
</td><td></td></tr>
<tr><td>


</td><td></td></tr>
</table>

Orijinden Geçen Doğrular

Bilgi

Orijinden geçen, eğimi m ve bir noktası $A(a,b)$ olan doğrunun denklemini yazalım.

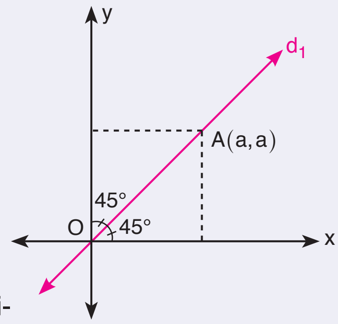


$y-b=m(x-a) \Rightarrow y-b=\frac{b}{a}(x-a)$

$y-b=\frac{b}{a}x-b,$

$y=\frac{b}{a}x-b+b \Rightarrow y=\frac{b}{a}x \Rightarrow y=mx$ olur.

Denklemi $y=mx$ şeklindeki doğrular orijinden geçer.



Yandaki şekilde d_1 doğrusu açıortaydır.

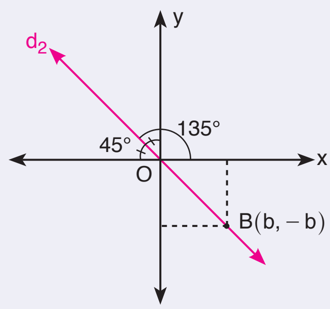
Eğim açısı 45° dir.

$m=\tan 45°=1$ olur. Buradan

$y=mx \Rightarrow y=1\cdot x \Rightarrow y=x$ olur.

Özel olarak $y=x$ doğrusu **I. açıortay doğrusu** olarak adlandırılır.

I. açıortay doğrusu üzerindeki noktaların apsisleri ve ordinatları birbirine eşittir.



Yandaki şekilde d_2 doğrusu açıortaydır. Eğim açısı x ekseniyle pozitif yönde yapılan açı olduğundan d doğrusunun eğim açısı 135°dir.

$m=\tan 135°=-\tan 45°=-1$ olur.

$y=mx \Rightarrow y=(-1)\cdot x \Rightarrow y=-x$ olur.

Özel olarak $y=-x$ doğrusu **II. açıortay doğrusu** olarak adlandırılır.

II. açıortay doğrusu üzerindeki noktaların apsisleri, ordinatlarının ters işaretlisidir.

Örnek

$A(2a-4,\ a+6)$ noktası I. açıortay doğrusu üzerinde, $B(b-3,\ 2b-9)$ noktası II. açıortay doğrusu üzerinde ise a + b'nin kaç olduğunu bulalım.

Çözüm

A noktası I. açıortay doğrusu üzerinde olduğundan A noktasının apsisi ile ordinatı birbirine eşittir.

O hâlde $2a-4=a+6 \Rightarrow a=10$ olur.

B noktası II. açıortay doğrusu üzerinde olduğundan B noktasının apsisi, ordinatının ters işaretlisine eşittir.

Buradan $b-3=-(2b-9) \Rightarrow b-3=-2b+9 \Rightarrow 3b=12 \Rightarrow b=4$ olur.

Buradan $a+b=10+4=14$ bulunur.

İki Doğrunun Birbirine Göre Durumları

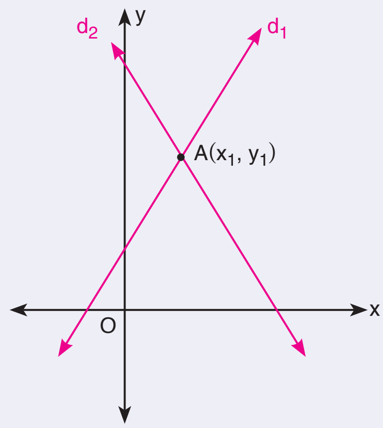
Bilgi

1. İki doğru bir noktada kesişebilir.

$d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ doğruları

$A(x_1, y_1)$ noktasında kesişiyorsa A noktası hem d_1 doğrusuna hem d_2 doğrusuna aittir. Bu yüzden iki doğrunun denklemini de sağlar.



İki doğru kesişiyorsa kesim noktası, doğru denklemlerinin ortak çözümüyle bulunur.

Doğrular tek noktada kesişiyorsa $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$'dir.

$\left.\begin{array}{l} d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ d_2: a_2x + b_1y + c_2 = 0 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözümü

d_1 ile d_2 doğrusunun kesim noktası $A(x_1, y_1)$ i verir.

Örnek

$\left.\begin{array}{l} d_1: 4x - y - 12 = 0 \\ d_2: x + y + 2 = 0 \end{array}\right\}$ doğrularının kesim noktasını bulalım.

Çözüm

d_1 ve d_2 doğrularının denklemlerini ortak çözelim.

$\left.\begin{array}{l} 4x - y - 12 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{array}\right\}$ ise

$$\begin{array}{rl} & 4x - y = 12 \\ + & x + y = -2 \\ \hline & 5x = 10 \\ & x = 2 \end{array}$$

bulunur.

Denklemlerden herhangi birinde $x = 2$ değerini yerine yazarak y değerini buluruz.

$4x - y = 12$ denkleminde yazalım.

$4 \cdot 2 - y = 12$ ise

$8 - y = 12$

$-y = 4$

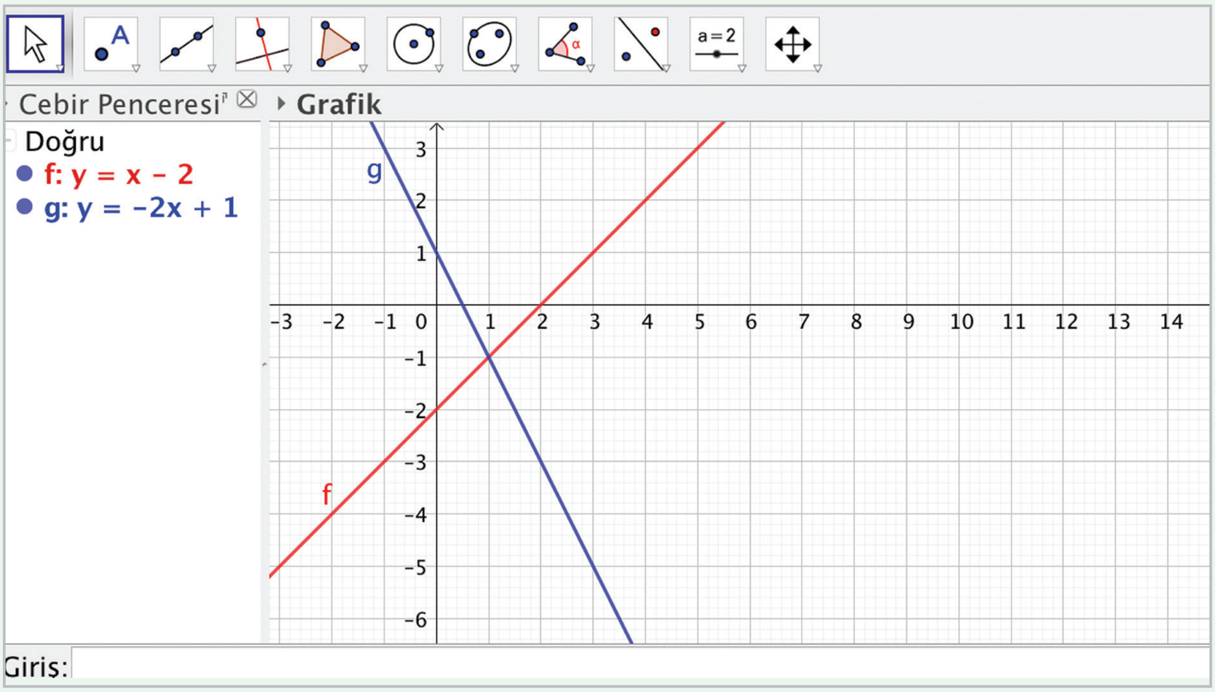
$y = -4$ olur.

O hâlde d_1 ile d_2 doğrularının kesim noktası $(2, -4)$ noktasıdır.

Bilgi-İletişim Teknolojisi

$y = x - 2$ ve $y = 1 - 2x$ doğrularının grafiklerini dinamik matematik yazılımında çizip doğruların kesim noktasını bulalım.

Dinamik matematik yazılımını çalıştıralım. Giriş bölümüne sırasıyla $y = x - 2$ ve $y = 1 - 2x$ denklemlerini yazıp Enter tuşuna basalım. Bu işlemlerin ardından aşağıdaki grafikleri elde ederiz.



Yukarıda görüldüğü gibi grafiklerin kesim noktası $(1, -1)$ noktasıdır.

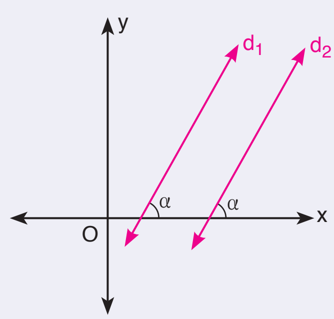
Bilgi

2. İki doğru birbirine paralel olabilir.

$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ denklemleriyle verilen doğrular birbirine paralel ise

$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$'dir. İki doğru birbirine paralel ise kesişmez.



Buradan

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesi $\varnothing$ dir.

Örnek

$$\left.\begin{array}{l} d_1: 4x-(a+2)y+8=0 \\ d_2: 2x+5y+3=0 \end{array}\right\}$$ doğruları birbirine paralel ise a değerini bulalım.

Çözüm

$d_1 \,//\, d_2$ ise $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$ olmalıdır.

$$\frac{4}{2}=\frac{-(a+2)}{5}$$

$$-(a+2)\cdot 2=20$$

$$-(a+2)=10$$

$$-a-2=10$$

$-a=12$ ise $a=-12$ bulunur.

Bilgi

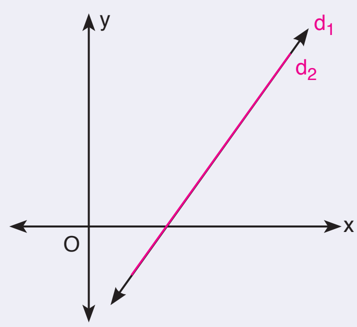
3. Doğrular çakışık olabilir.

$d_1: a_1x+b_1y+c_1=0$

$d_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ denklemleriyle verilen doğrular birbirine çakışık ise $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$'dir.

Yani iki denklem de aynı doğruyu belirtir.

$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ olduğundan d_1 ve d_2 doğrularının denklemlerinin ortak çözümleri sonsuz elemanlıdır.



Örnek

$$\left.\begin{array}{l} d_1: (a+1)x-6y+8=0 \\ d_2: 6x+(b-3)y+12=0 \end{array}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlı ise $a\cdot b$'nin değerini bulalım.

Çözüm

d_1 ve d_2 denklemleri, birer doğru denklemidir. Sistemin ortak çözümü sonsuz elemanlı olduğundan bu iki doğru çakışıktır. O hâlde

$\dfrac{a+1}{6}=\dfrac{-6}{b-3}=\dfrac{8}{12}$ ise $\dfrac{a+1}{6}=\dfrac{8}{12}$ $\qquad$ $\dfrac{-6}{b-3}=\dfrac{8}{12}$

$12a+12=48$ $\qquad$ $8b-24=-72$

$12a=36$ $\qquad$ $8b=-48$

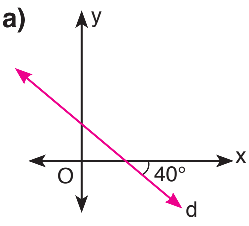
$a=3$ $\qquad$ $b=-6$ olur.

Buradan $a\cdot b=3\cdot(-6)=-18$ bulunur.

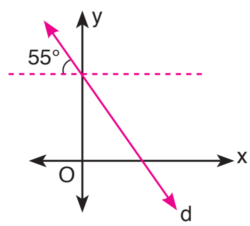
Alıştırmalar 2-3

1. Aşağıda verilen d doğrularının eğim açılarını bulunuz.

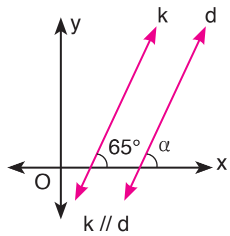
a)



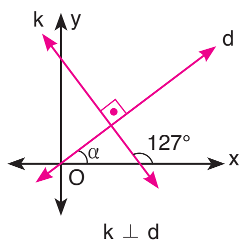
b)



c)



ç)



2. Aşağıda iki noktası verilen doğruların eğimlerini bulunuz.

a) $A(1,4)$**,** $B(3,-2)$ **b)** $C(-2,-2)$, $D(4,6)$ **c)** $E(0,2)$, $F(4,0)$

3. d_1 doğrusu $A(2,4)$, $B(6,9)$ noktalarından; d_2 doğrusu $C(a,8)$, $D(2,-2)$ noktalarından geçmektedir. d_1 doğrusu ile d_2 doğrusu paralel olduğuna göre a değerini bulunuz.

4. Aşağıda bir noktası ve eğimi verilen doğruların denklemlerini yazınız.

a) $A(1,1)$, $m=2$ **c)** $B(-4,-2)$, $m=\frac{1}{2}$

b) $C(2,-6)$, $m=-3$ **ç)** $D(0,0)$, $m=4$

5. $A(-2,-1)$, $B(-4,5)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y=-3x-7$ B) $y=\frac{1}{3}x-7$ C) $y=-3x+2$

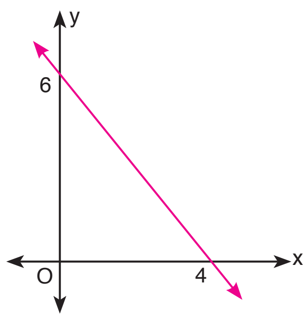
D) $y=-\frac{1}{3}x+2$ E) $y=-3x-2$

6. $A(1,-2)$, $B(a,-4)$, $C(7,-8)$ noktaları aynı doğru üzerinde olduğuna göre a kaçtır?

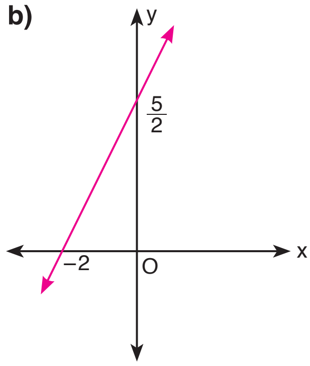
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

7. Aşağıda grafikleri verilen doğruların denklemlerini bulunuz.

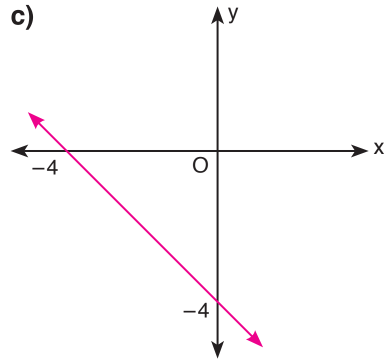
a)



b)



c)



8. Aşağıdaki doğruların eğimlerini bulunuz.

a) $d_1: 3x + 5y - 3 = 0$ **b)** $d_2: 2x - 6y + 5 = 0$

c) $d_3: 8x - 2y + 1 = 0$ **ç)** $d_4: y = -3x + 7$

9. $(a-3)x + y - 8 = 0$ denkleminin belirttiği doğru, x eksenine paralel; $5x + (2a + b + 4)y - 1 = 0$ denkleminin belirttiği doğru, y eksenine paralel ise $a \cdot b$ kaçtır?

A) – 20 B) – 24 C) – 27 D) – 30 E) – 40

10. $A(2k-4, 8-k)$ noktası I. açıortay doğrusu üzerinde ise $y = 2k$, $x = -3k$ doğruları ile eksenler arasında kalan bölgenin alanı kaç br^2 dir?

A) 72 B) 84 C) 88 D) 90 E) 96

11. $d_1: 3x - y + 2 = 0$

$d_2: x + y + 6 = 0$

denklemleriyle verilen doğruların kesim noktası $A(a, b)$ ise $a \cdot b$'nin değeri kaçtır?

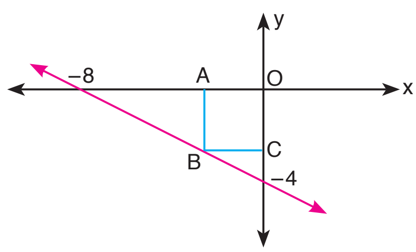
A) 4 B) 6 C) 8 D) 12 E) 16

12. $d_1: ax - 3y - 18 = 0$

$d_2: 2x + by - 6 = 0$

doğru denklemleri veriliyor. d_1 ve d_2 doğruları çakışık ise a ve b değerlerini bulunuz.

13. Yandaki analitik düzlemde verilen OABC karesinin B köşesi d doğrusunun üzerindedir. Buna göre $A(OABC)$ nın kaç br^2 olduğunu bulunuz.



2.1.4. Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

Bilgi

$A(x_1, y_1)$ noktasının $ax + by + c = 0$ denklemi ile verilen doğruya olan uzaklığı $h = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$'dir.

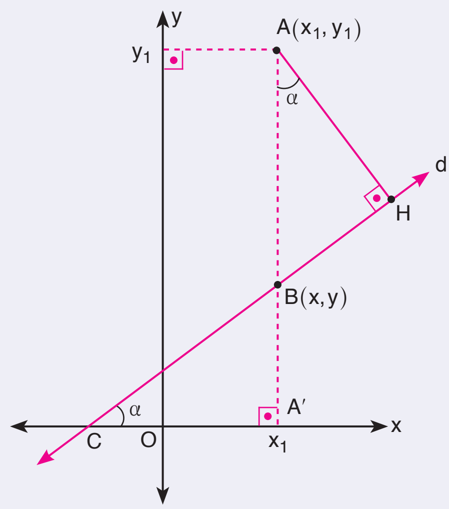
Doğrunun denklemi $y = mx + n$ biçimindeyse

$h = \dfrac{|mx_1 - y_1 + n|}{\sqrt{m^2 + 1}}$'dir.

Bu eşitliğin doğru olduğunu gösterelim.

$A(x_1, y_1)$ noktasından d doğrusuna çizilen dikmenin ayağı H olsun.

$|AH| = h$, A noktasının $d: ax + by + c = 0$ doğrusuna en kısa uzaklığıdır.



$B(x, y)$ noktası d doğrusu üzerinde olduğundan $x = x_1, y = \dfrac{-c - ax_1}{b}$ ise $B\left(x_1, \dfrac{-c - ax_1}{b}\right)$'dir.

($x = x_1$ i doğru denkleminde yerine yazdık.)

$|AB| = |AA'| - |BA'| = y_1 - \left(\dfrac{-c - ax_1}{b}\right) = \dfrac{ax_1 + by_1 + c}{b}$ olur.

$\widehat{A'BC} = \widehat{HBA}$ (Ters açılar) ve $\widehat{AHB} = \widehat{BA'C} = 90^\circ$ olduğundan $\widehat{BCA'} = \widehat{BAH}$ olur.

ABH dik üçgeninde $\tan\alpha = -\dfrac{a}{b}$ olduğundan

$|AH| = b$ ve $|BH| = a$,

$|AB| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ve $\cos\alpha = \dfrac{|AH|}{|AB|} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ olur.

$\cos\alpha = \dfrac{|AH|}{|AB|}$ den $|AH| = \cos\alpha \cdot |AB|$ olur. Bulduğumuz değerleri yerine yazarsak

$h = |AH| = \dfrac{\cancel{b}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \dfrac{ax_1 + by_1 + c}{\cancel{b}} = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ olur.

(Uzaklık negatif olmaz.)

Örnek

$A(2, 1)$ noktasının $6x - 8y + 6 = 0$ doğrusuna uzaklığını bulalım.

Çözüm

$$h = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$h = \frac{|6 \cdot 2 - 8 \cdot 1 + 6|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{|12 - 8 + 6|}{\sqrt{100}} = \frac{10}{10} = 1 \text{ br olur.}$$

Örnek

$A(-6,-3)$ noktasının $y=\frac{5}{12}x+3$ doğrusuna uzaklığının kaç br olduğunu bulalım.

Çözüm

Doğrunun denklemi $y=mx+n$ biçiminde verildiğinden $h=\frac{|mx-y+n|}{\sqrt{1+m^2}}$ olur.

Doğrunun eğimi $m=\frac{5}{12}$ olduğundan

$$h=\frac{\left|\frac{5}{12}\cdot(-6)-(-3)+3\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2}}=\frac{\left|-\frac{5}{2}+6\right|}{\sqrt{1+\frac{25}{144}}}=\frac{\left|\frac{7}{2}\right|}{\sqrt{\frac{169}{144}}}=\frac{7}{2}\cdot\frac{12}{13}=\frac{42}{13} \text{ br olur.}$$

Örnek

Köşe koordinatları $A(-1,2)$, $B(3,1)$, $C(4,4)$, $D(0,5)$ olan bir dörtgenin C köşesinin $[BD]$ köşegenine uzaklığının kaç br olduğunu bulalım.

Çözüm

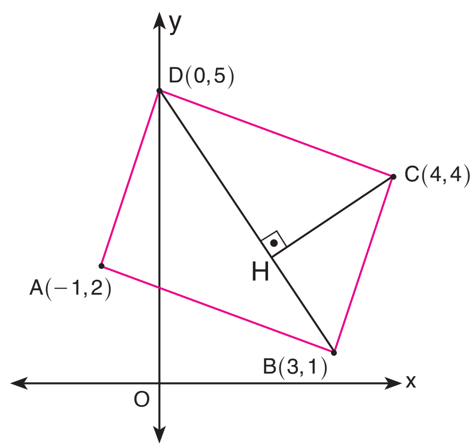
B ve D noktalarından geçen doğru denklemini bulalım.

İki noktası bilinen doğru denklemi $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ olduğundan

$$\frac{y-1}{x-3}=\frac{5-1}{0-3} \text{ ise } y-1=\frac{4}{-3}(x-3)$$

$$y-1=-\frac{4}{3}x+4$$

$$y=-\frac{4}{3}x+5\text{'tir.}$$



$|CH|=h$ dersek $C(4,4)$ noktasının $y=-\frac{4}{3}x+5$ doğrusuna uzaklığı

$$h=\frac{|mx-y+n|}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{\left|-\frac{4}{3}\cdot 4-4+5\right|}{\sqrt{1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}}=\frac{\left|-\frac{16}{3}+1\right|}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}}$$

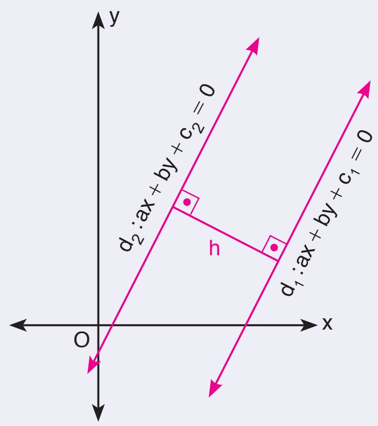
$$=\frac{\left|-\frac{13}{3}\right|}{\sqrt{\frac{25}{9}}}=\frac{13}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{13}{5} \text{ bulunur.}$$

Paralel İki Doğru Arasındaki Uzaklık

Bilgi

$\left.\begin{array}{l} d_1: ax + by + c_1 = 0 \\ d_2: ax + by + c_2 = 0 \end{array}\right\}$ denklemleriyle verilen doğruların eğimleri birbirine eşittir. Bu yüzden $d_1 \, // \, d_2$ olur. Birbirine paralel iki doğru arasındaki uzaklığa h dersek

$$h = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{'dir.}$$



Örnek

$d_1: 5x - 12y - 11 = 0$

$d_2: -10x + 24y + 4 = 0$

doğruları arasındaki uzaklığın kaç br olduğunu bulalım.

Çözüm

d_1 ve d_2 doğruları için $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{5}{-10} = -\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{-12}{24} = -\dfrac{1}{2}$ ve

$\dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{-11}{4}$

olmak üzere $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ olduğundan $d_1 \, // \, d_2$ dir.

Paralel d_1 ve d_2 doğruları arasındaki uzaklığa h dersek

h yi bulmak için önce $d_1: 5x - 12y + 11 = 0$ denklemini -2 ile çarparız.

$d_1: -10x + 24y - 22 = 0$

$d_2: -10x + 24y + 4 = 0$ olur. Buradan

$$h = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-22 - 4|}{\sqrt{(-10)^2 + (24)^2}} = \frac{|-26|}{\sqrt{676}} = \frac{26}{\sqrt{26^2}} = \frac{26}{26} = 1 \text{ br olur.}$$

Örnek

$d_1: 3x + 4y - 6 = 0$

$d_2: 3x + 4y + k = 0$

doğruları arasındaki uzaklık 4 br ise k nın alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

d_1 ve d_2 doğruları birbirine paraleldir. İki paralel doğru arasındaki uzaklık formülünden

$h = \dfrac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{|-6-k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4$ olur. Buradan

$\dfrac{|-6-k|}{\sqrt{9+16}} = 4 \Rightarrow |-6-k| = 20$ olduğundan

$-6 - k = 20$ veya $-6 - k = -20$

$-k = 20 + 6 \qquad -k = -20 + 6$

$-k = 26 \qquad -k = -14$

$k = -26 \qquad k = 14$ bulunur.

Alıştırmalar 2-4

1. $A(4,3)$ noktasının $-3x - 4y + 12 = 0$ doğrusuna olan uzaklığını bulunuz.

2. $A(2,a)$ noktasının $5x + 12y - 1 = 0$ doğrusuna uzaklığı 3 br ise a'nın alabileceği değerleri bulunuz.

3. $d_1: 3x - 4y + 2 = 0$

$d_2: 9x - 12y - 24 = 0$

denklemleriyle verilen doğrular arasındaki uzaklığı kaç br'dir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4. Köşeleri $6x - 8y + 8 = 0$ ve $-6x + 8y + 12 = 0$ doğruları üzerinde olan karenin alanı kaç birimkare-dir?

A) 10 B) 8 C) 6 D) 5 E) 4

2. DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Aşağıdaki noktalı yerlere uygun ifadeleri yazarak cümleleri tamamlayınız.

a) $A(-3,5)$ noktası ile $B(1,2)$ noktası arasındaki uzaklık .... br'dir.

b) $A(0,2)$ noktası .... ekseni üzerindedir.

c) $K\left(\frac{a}{2}-2, 1+\frac{b}{3}\right)$ noktası orijinde ise $a+b=$ ....

ç) $A(2,4)$ ve $B(6,a)$ olmak üzere $[AB]$ nın orta noktası $(4,1)$ ise $a=$ ...... olur.

d) $A(a,b)$ noktası koordinat düzleminin II. bölgesinde ise a ...... 0 ve b ...... 0 olur.

2. Aşağıdaki cümlelerin başındaki kutucuğa ifade doğruysa "D", yanlışsa "Y" yazınız.

a) ☐ Eğim açısı 135° ve $A(2,1)$ noktasından geçen doğrunun denklemi $x+y-3=0$'dır.

b) ☐ $A(10,0)$ ve $B(0,5)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi $x+2y-10=0$'dır.

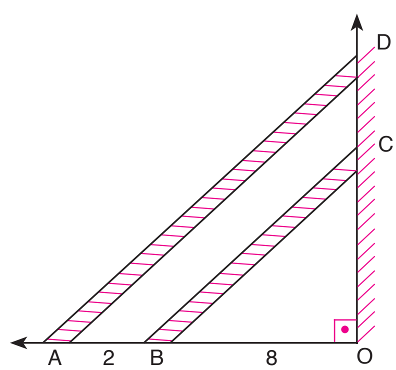
c) ☐ $2x-3y+4=0$ doğrusuna paralel olan ve $A(-2,3)$ noktasından geçen doğrunun denklemi $2x-3y+9=0$'dır

ç) ☐ $A(3,2)$ noktası $2mx+3y+4=0$ doğrusunun üzerinde ise $m=1$'dir.

d) ☐ $B(1,4)$ noktası $x+ky+7=0$ doğrusunun üzerinde ise $k=-2$'dir.

e) ☐ $A(x\cdot y^2, x+y)$ noktası analitik düzlemde II. bölgede ise $B(x, x-y)$ noktası analitik düzlemde IV. bölgededir.

3. Yandaki şekilde yer düzlemine dik bir duvara, iki merdiven birbirine paralel olarak dayanmıştır. $|AB|=2$ br, $|BO|=8$ br ve BC merdivenin üzerinden geçen doğrunun denklemi $3x-4y+24=0$ olduğuna göre AD merdiveninin üzerinden geçen doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?



A) $3x-4y-30=0$

B) $3x-4y+24=0$

C) $3x-4y+27=0$

D) $3x-4y+30=0$

E) $3x-4y+21=0$

4. $A(2a-b,\ 3a+4)$ ve $B(4a+b,\ 16)$ noktaları aynı noktayı belirttiğine göre $a \cdot b$' nin değeri kaçtır?

A) – 4 B) 4 C) – 9 D) 9 E) – 16

5. $A(12-a,\ 2a-8)$ noktası analitik düzlemin I. bölgesinde ise a nın alabileceği kaç tam sayı değeri vardır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

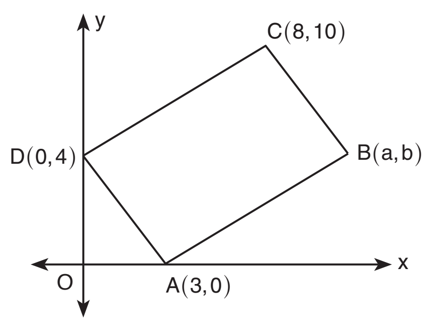
6. Analitik düzlemde $A(1,2)$, $B(a,b)$, $C(5,6)$, $D(x,y)$ bir dörtgenin ardışık köşeleridir. $[AC]$ köşegeninin uzunluğu kaç br'dir?

A) $2\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$ D) $5\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{2}$

7. $A(-1,-2)$ ve $B(3,a)$ noktaları veriliyor. $|AB| = 5$ br ise a nın alabileceği değerlerin çarpımı kaçtır?

A) – 5 B) – 6 C) – 8 D) – 12 E) – 15

8. Analitik düzlemde köşe koordinatları $A(3,0)$, $B(a,b)$, $C(8,10)$ ve $D(0,4)$ olan ABCD paralelkenarı çizilmiştir. Buna göre ABCD paralelkenarının çevresinin uzunluğu kaç br'dir?

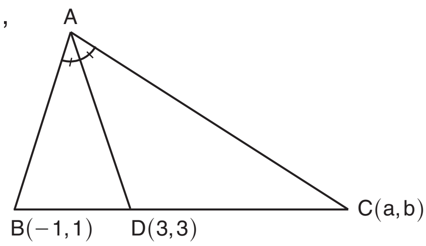


A) 16 B) 20 C) 24
D) 30 E) 36

9. $A(5,-7)$, $B(0,3)$, $C(a,b)$ olmak üzere $C \in [AB]$ ve $3|AC| = 2|CB|$ ise $a + b$ kaçtır?

A) 0 B) 3 C) 6 D) 9 E) 12

10. Şekildeki $\widehat{ABC}$ nde $[AD]$ açıortay, $B(-1,1)$, $C(a,b)$, $D(3,3)$, $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{2}{5}$ ise $a - b$ değeri kaçtır?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

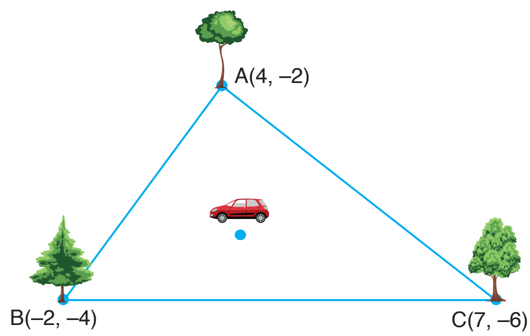
11. Köşe koordinatları $A(2,3)$, $B(-2,-1)$, $C(4,-1)$ olan $\widehat{ABC}$ nin $[AC]$ kenarına ait kenarortayının uzunluğu kaç br'dir?

A) $\sqrt{26}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{7}$ D) $\sqrt{29}$ E) $\sqrt{30}$

12. Bir $\widehat{ABC}$ nin köşe koordinatları $A(1,5)$, $B(-2,4)$, $C(-8,3)$ olmak üzere üçgenin ağırlık merkezinin orijine uzaklığı kaç br'dir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

13. Yandaki ölçeklendirilmiş görselde A, B ve C ağaçlarının düzlemde koordinatları sırasıyla $(4,-2)$, $(-2,-4)$ ve $(7,-6)$ dır. Bu görselde ağaçlar arası uzaklık belirli bir uzunluk birimine göre verilmiştir. Ağaçların oluşturduğu üçgensel bölgenin ağırlık merkezindeki arabanın A ağacına uzaklığı 10 km olduğuna göre C ağacına uzaklığı kaç km'dir?



A) 16 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

14. $A(2,k)$ noktası, $2x - 4y + 7 = 0$ doğrusuna paralel olan ve $B(4,-2)$ noktasından geçen doğru üzerinde bulunduğuna göre k kaçtır?

A) – 6 B) – 5 C) – 4 D) – 3 E) – 2

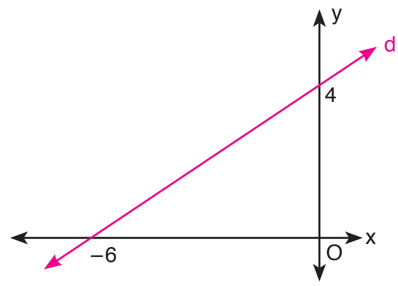
15. $y = 4x + 3$ doğrusuna dik olan ve $A(-8,-3)$ noktasından geçen doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x + 4y - 8 = 0$ B) $4x + y + 20 = 0$ C) $x + 4y + 20 = 0$
D) $4x + y - 8 = 0$ E) $x + 4y + 8 = 0$

16. $A(-3,-4)$ ve $B(7,4)$ noktalarından geçen doğrunun x eksenini kestiği noktanın apsisi kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

17. $A(a,6)$ noktası, yanda grafiği verilen d doğrusunun üzerindedir. Buna göre a kaçtır?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

18. $3x - y + 12 = 0$ doğrusu ile eksenler arasında kalan üçgensel bölgenin alanı kaç br^2dir?

A) 18 B) 24 C) 30 D) 36 E) 48

19. $\widehat{ABC}$ nin köşe koordinatları $A(4,7)$, $B(2,3)$, $C(10,9)$ dur. Buna göre $\widehat{ABC}$ nin $[BC]$ kenarına ait yüksekliği kaç br'dir?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

20. $4x - 2y + 6 = 0$, $x + y + 9 = 0$ ve $ax - y + 3 = 0$ denklemleriyle verilen doğrular aynı noktadan geçtiğine göre a kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

21. $d_1: 2x - (a+1)y + 8 = 0$

$d_2: 3x + 6y - 3 = 0$ doğruları birbirine paraleldir.

$A(a+1,\ a+2)$ noktasından geçen ve d_1 doğrusuna dik olan doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = 2x + 1$ B) $y = 2x - 3$ C) $y = 2x + 6$

D) $y = 2x - 6$ E) $y = 2x + 5$

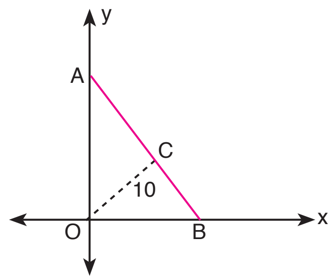
22. $d_1: 12x - (a+4)y + 3 = 0$

$d_2: bx + 6y + 1 = 0$

denklemleriyle verilen doğrular çakışık olduğuna göre a + b değeri kaçtır?

A) – 12 B) – 16 C) – 18 D) – 20 E) – 22

23. Yandaki analitik düzlemde $|OB| = 12$ br, $|AC| = |OC| = 10$ br olduğuna göre C noktasının koordinatları toplamı kaçtır?



A) 14 B) 13 C) 12

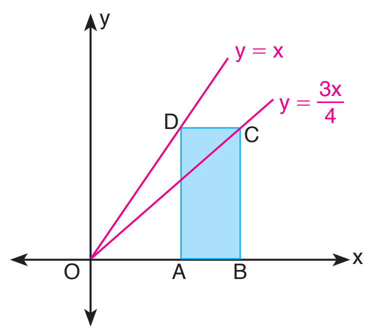
D) 11 E) 10

24. Analitik düzlemde $P(0,12)$ noktasının, x ekseninin üzerinde ve pozitif tarafında bulunan A, B ve C noktalarına uzaklıkları sırası ile 13 br, 15 br ve 20 br olduğuna göre $|AB| - |BC|$ değeri kaç olur?

A) – 1 B) – 2 C) – 3 D) – 5 E) – 6

25. Yandaki analitik verilen ABCD dikdörtgenin D ve C köşeleri $y = x$ ve $y = \frac{3x}{4}$ doğruları üzerindedir.

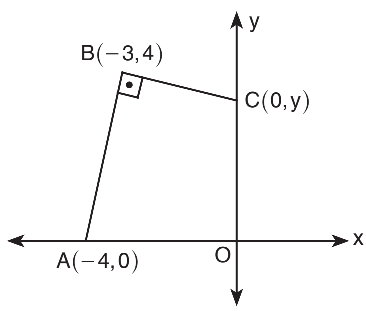
$A(ABCD) = 27\ cm^2$ olduğuna göre B köşesinin apsisi kaçtır?



A) 14 B) 12 C) 10

D) 6 E) 1

26. Yandaki analitik düzlemde noktaların koordinatları verilmiştir. $[AB] \perp [BC]$ olduğuna göre C noktasının ordinatı kaçtır?



A) $\frac{7}{4}$ B) $\frac{9}{4}$ C) $\frac{11}{4}$

D) $\frac{13}{4}$ E) $\frac{15}{4}$

Ölçme ve Değerlendirme Soruları

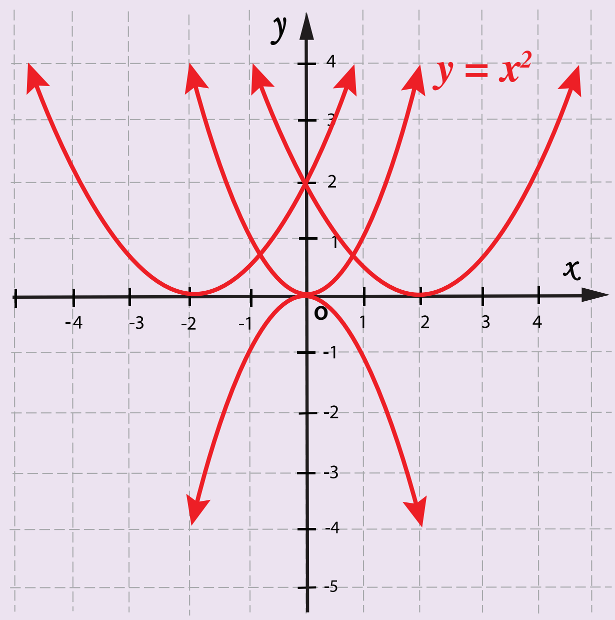
EBA

3

FONKSİYONLARDA UYGULAMALAR

Bu bölümde;

- Fonksiyonun grafik ve tablo temsilini kullanarak problemleri çözmeyi,
- İkinci dereceden bir değişkenli fonksiyonun grafiğini çizerek yorumlamayı,
- İkinci dereceden fonksiyonlarla modellenebilen problemleri çözmeyi,
- Bir fonksiyonun grafiğinden, dönüşümler yardımı ile yeni fonksiyon grafiklerini çizmeyi öğreneceksiniz.



Terimler ve Semboller

Terimler ve Kavramlar: ortalama değişim hızı, ikinci dereceden fonksiyon, tepe noktası, parabol, simetri ekseni, öteleme, simetri, dönüşüm

Sembol ve Gösterimler: $y = ax^2 + bx + c$, $y = a(x - r)^2 + k$, $y = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$

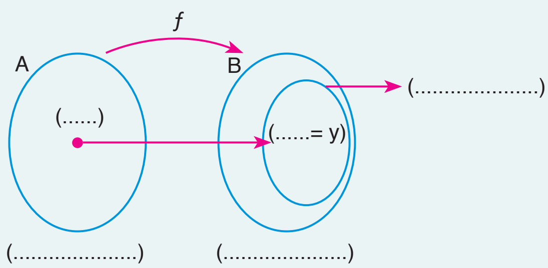
3 Fonksiyonlarda Uygulamalar

Hazırlık Çalışması

1. A ve B boş kümeden farklı iki küme olsun. Buna göre aşağıdaki noktalı yerlere uygun ifadeleri yazarak cümleleri tamamlayınız.

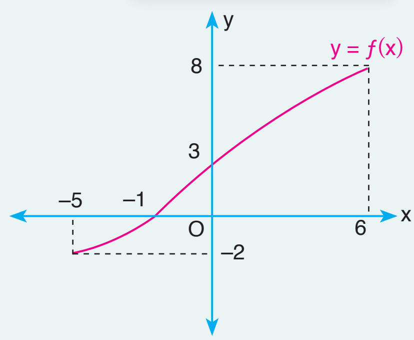
- A nın her elemanını B kümesinde yalnız bir elemanına eşleyen f kuralına, A'dan B'ye .... denir.
- A kümesinin, B kümesinde eşleştiği tüm elemanlardan oluşan ve $f(A)$ biçiminde gösterilen kümeye, A kümesinin f altındaki .... denir.

2. $f: A \longrightarrow B$ fonksiyonu aşağıda Venn şemasında verilmiştir. Buna göre noktalı yerlere yandaki kutudan uygun olanları yazınız.



1) x
2) $f(x)$
3) $f(A)$
4) Tanım kümesi
5) Değer kümesi

3. Yandaki grafikten yararlanarak aşağıdaki noktalı yerleri doldurunuz.



- $f(-5)$ = ...
- f fonksiyonunun tanım kümesi .... olur.
- $f(x) = 0$ denklemini sağlayan x değeri ....
- f fonksiyonunun görüntü kümesi .... olur.
- $f(6) + f(0) - f(-5)$ = ...

4. Aşağıda verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz. Fonksiyonların görüntü kümesini bulunuz.

- $f:[-2, 4] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = -x + 1$
- $g:[0, 5] \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = 2x + 1$
- $h:[-4, -2] \longrightarrow \mathbb{R},\ h(x) = \frac{x}{2}$

3.1. FONKSİYONLARLA İLGİLİ UYGULAMALAR



Sabit hızla giden bir aracın zamanla aldığı yol, doğrusal fonksiyonla ifade edilir.

Örneğin 80 km/sa. sabit hızla giden aracın t saat sonunda aldığı yol $f(t) = 80 \cdot t$ fonksiyonu ile modellenir.

Belli bir yükseklikten V_0 ilk hızıyla aşağıya doğru

atılan cismin, zamana (t) göre aldığı yol

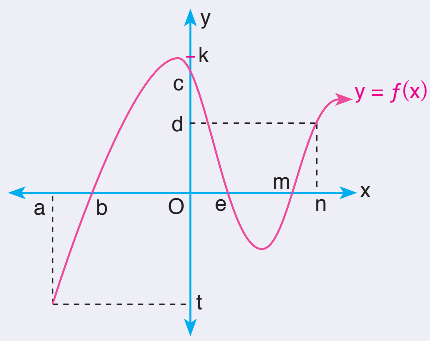
$f(t) = V_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ fonksiyonu ile modellenir. (g : yer çekimi ivmesi)

Günlük yaşantımızda fonksiyonlar birçok alanda kullanılmaktadır. Siz de çevrenizde fonksiyonların kullanıldığı yerleri araştırınız.

3.1.1. Fonksiyon Grafiğinin Yorumu

Bilgi

Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre



a) Fonksiyonun grafiği x eksenini (b, 0), (e, 0) ve (m, 0) noktalarında kesmektedir. Burada y = 0 için $f(x) = 0$ denkleminin kökleri, fonksiyon grafiğinin x eksenini kestiği noktalardır.

Fonksiyonun grafiği y eksenini $(0, c)$ noktasında kesmektedir. Burada x = 0 için y nin aldığı değer $f(0) = c$ olur.

b) Fonksiyonun grafiği (a, b) ve (e, m) nda x ekseninin altındadır yani y değerleri negatiftir.

Her $x \in (a, b) \cup (e, m)$ $f(x) < 0$ olup $f(x)$ negatiftir.

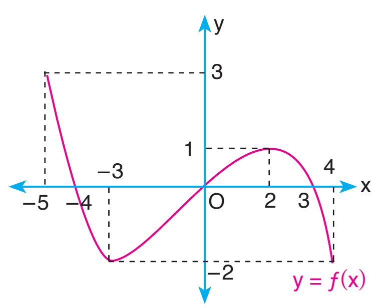
Fonksiyonun grafiği (b, e) ve (m, n) nda x ekseninin üzerindedir yani y değeri pozitiftir.

Her $x \in (b, e) \cup (m, n)$ nda $f(x) > 0$ olup $f(x)$ pozitiftir.

c) Fonksiyon grafiğini incelediğimizde $y = f(x)$ denkleminde y nin en büyük değeri k olduğundan fonksiyonun maksimum değeri k, y nin en küçük değeri t olduğundan fonksiyonun minimum değeri t olur.

Örnek

Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre



a) Fonksiyon grafiğinin eksenleri kestiği noktaları bulalım.

b) Fonksiyonun pozitif ve negatif olduğu aralıkları bulalım.

c) Fonksiyonun maksimum ve minimum değerlerini bulalım.

ç) $f(x) = 0$ denkleminin köklerini bulalım.

d) $f(0) = a + 3$ denkleminde a değerini bulalım.

Çözüm

Grafiğe göre

a) Fonksiyonun grafiği; x eksenini $(-4,0)$, $(0,0)$, $(3,0)$ noktalarında, y eksenini $(0,0)$ noktasında kesmektedir.

b) Fonksiyon grafiğine göre $x \in (-5,-4)$ ve $x \in (0,3)$ için $f(x) > 0$ olduğundan $x \in (-5,-4) \cup (0,3)$ nda $f(x)$ pozitiftir. $x \in (-4,0)$ ve $x \in (3,4)$ nda $f(x) < 0$ olduğundan $x \in (-4,0) \cup (3,4)$ nda $f(x)$ negatiftir.

c) Grafiğe göre y nin en büyük değeri 3 olduğundan $f(x)$ fonksiyonunun maksimum değeri 3, y nin en küçük değeri -2 olduğundan $f(x)$ fonksiyonunun minimum değeri -2 bulunur.

ç) $f(x) = 0$ denkleminin kökleri fonksiyonun grafiğinin x eksenini kestiği noktalardır. Buna göre $f(x) = 0$ denkleminin kökleri -4, 0 ve 3 olarak bulunur.

d) $f(0) = a + 3$ denkleminin kökü, fonksiyonun grafiğinde $x = 0$ için y nin aldığı değerdir.

$f(0) = 0 \Rightarrow 0 = a + 3 \Rightarrow a = -3$ bulunur.

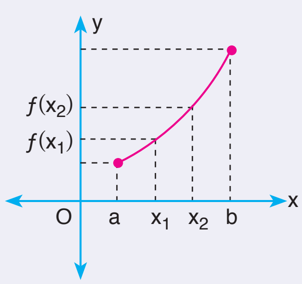
Artan ve Azalan Fonksiyonlar

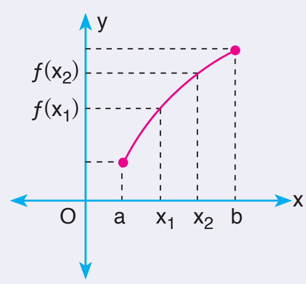
Bilgi

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $(a,\ b) \subseteq A$ olmak üzere

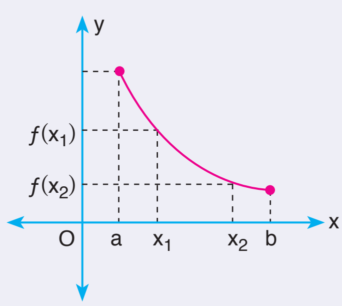
$x_1, x_2 \in (a, b)$ için

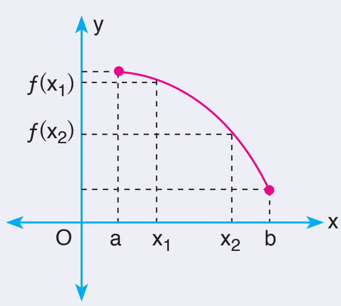
1) Her $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ ise f, $[a,b]$ nda artandır.





2) Her $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ ise f, $[a,b]$ nda azalandır.



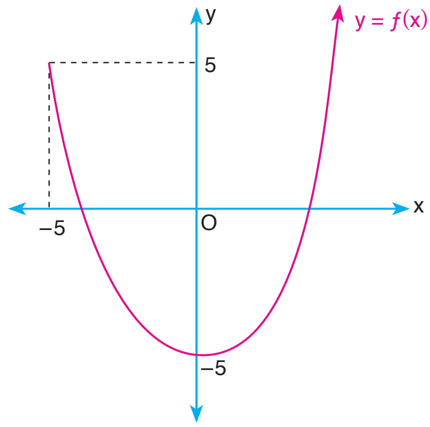


3) Her $x_1,\ x_2 \in A$ için $f(x_1) = f(x_2) = c \in \mathbb{R}$ ise f sabittir.

Örnek

Yanda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre f fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulalım.



Çözüm

Fonksiyonun grafiğini incelediğimizde $x \in (-5,0)$ nda x değerleri arttıkça y değerlerinin azaldığını görürüz.

Dolayısıyla $[-5,0]$ nda fonksiyon azalandır.

$x \in (0,\infty)$ nda x değerleri arttıkça y değerleri artmaktadır. Dolayısıyla $[0,\infty)$ nda fonksiyon artandır.

Örnek

Yanda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre

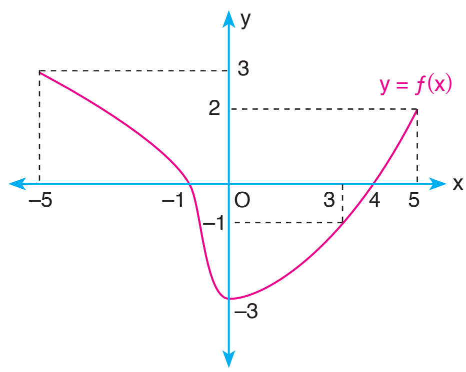
a) Fonksiyonun tanım ve değer kümelerini bulalım.

b) Fonksiyonun pozitif ve negatif olduğu aralıkları bulalım.

c) Fonksiyon grafiğinin x ve y eksenlerini kestiği noktaları bulalım.

ç) Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları bulalım.

d) Fonksiyonun verilen aralıktaki maksimum ve minimum değerlerini bulalım.



Çözüm

a) Tanım kümesinin elemanları x ekseninde, görüntü kümesinin elemanları y ekseninde bulunur. Buna göre f fonksiyonunun tanım kümesi $[-5,5]$, görüntü kümesi $[-3,3]$ dır.

b) Fonksiyonun grafiği, $(-1,4)$ nda x ekseninin altındadır yani y değerleri negatiftir.

Buradan her $x \in (-1,4)$ için $f(x) < 0$ olup f fonksiyonu negatiftir.

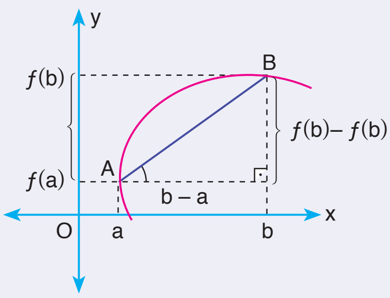
Fonksiyonun grafiği $[-5,-1)$ ve $(4,5]$ nda x ekseninin üzerindedir yani y değerleri pozitiftir. Buradan her $x \in [-5,-1) \cup (4,5]$ için $f(x) > 0$ olup f fonksiyonu pozitiftir.

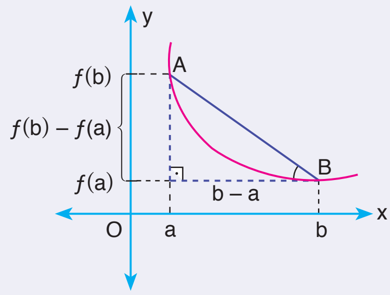
c) f fonksiyonunun grafiği $(-1,0)$, $(4,0)$ noktalarında x eksenini, $(0,-3)$ noktasında y ekseni kesmiştir.

ç) $(-5,0)$ nda x değerleri arttıkça y değerleri azaldığından $[-5,0]$ nda fonksiyon azalan, $(0,5)$ nda x değerleri arttıkça y değerleri de arttığından $[0,5]$ nda fonksiyon artandır.

d) Grafiğe göre $f(x)$ fonksiyonunun $[-5,5]$ nda maksimum değeri 3 ve minimum değeri -3 bulunur.

Bilgi





f fonksiyonunun $[a,b]$ ndaki ortalama değişim hızı $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ile hesaplanır.

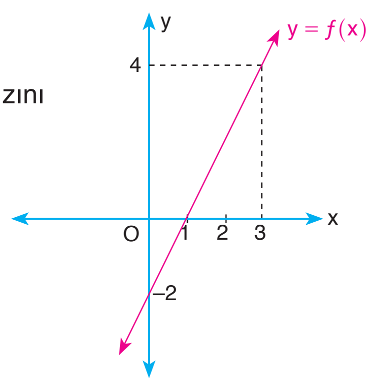
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ değeri f fonksiyonunun grafiğini A ve B noktalarında kesen doğrunun eğimidir.

E-İçerik

Örnek

Yanda $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $[0,1]$ ve $[1,3]$ nda fonksiyonun ortalama değişim hızını bulalım.



Çözüm

$f(0)=-2$ ve $f(1)=0$'dır.

$[0,1]$ nda fonksiyonun ortalama değişim hızı

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{0-(-2)}{1}=\frac{2}{1}=2\text{'dir.}$$

$f(3)=4$'tür.

$[1,3]$ nda fonksiyonun ortalama değişim hızı

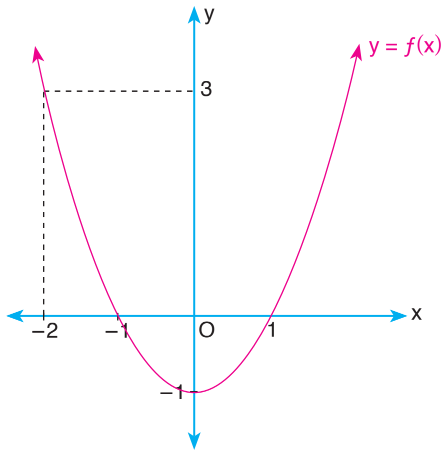
$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{4-0}{2}=\frac{4}{2}=2\text{'dir.}$$

Fonksiyon grafiği doğrusaldır. Bu doğrunun eğimi fonksiyonun ortalama değişim hızına eşittir.

Örnek

Yanda $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $[-2, 1]$ nda fonksiyonun ortalama değişim hızını bulalım.



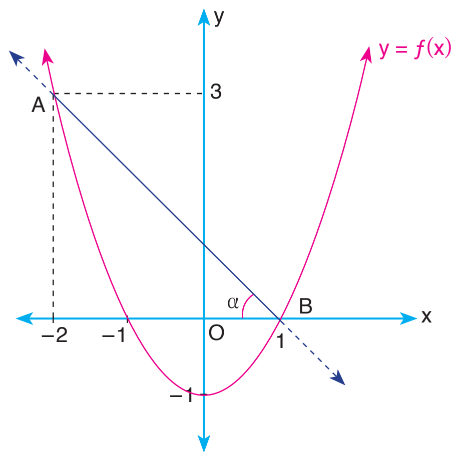
Çözüm

$f(-2) = 3$ ve $f(1) = 0$'dır.

$[-2, 1]$ nda fonksiyonun ortalama değişim hızı

$\dfrac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \dfrac{0 - 3}{1 + 2} = \dfrac{-3}{3} = -1$ olur.

Burada $x = -2$ ve $x = 1$ noktalarında grafiği kesen AB doğrusunun eğimi $m = -1$'dir.



Örnek

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x + 1$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun $[-1, 2]$ ndaki ortalama değişim hızını bulalım.

Çözüm

$f(x) = x^3 - 2x + 1$

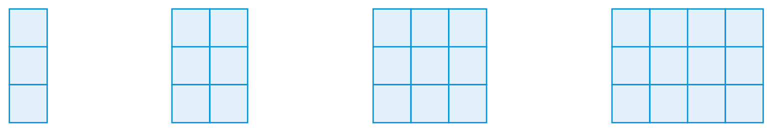
$x = -1$ için $f(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1) + 1 = -1 + 2 + 1 = 2$

$x = 2$ için $f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 + 1 = 8 - 4 + 1 = 5$ olur.

$[-1, 2]$ ndaki fonksiyonun ortalama değişim hızı $\dfrac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \dfrac{5 - 2}{2 + 1} = \dfrac{3}{3} = 1$ bulunur.

Örnek

Bir kenarı 40 cm olan kare biçimindeki kaldırım taşları ile 120 cm genişliğinde bir kaldırım döşenecektir.



1. adım 2. adım 3. adım 4. adım

Buna göre

a) Bu kaldırım taşlarının birbirine yapışık olan kenarlarının sayısını veren bir fonksiyon kuralı yazalım.

b) 14 m bittiğinde kaç kenarın birbirine yapışık olduğunu bulalım.

c) $[5,9]$ ndaki fonksiyonun ortalama değişim hızını bulalım.

Çözüm

a)

Adım sayısı	1	2	3	4	....
Yapışık olan kenar sayısı	2	7	12	17	....

5 5 5 5 ....

Her bir adımdaki yapışık kenar sayısı bir öncekinden 5 fazladır. O hâlde

1. adımda yapışık kenar sayısı: $5 \cdot 1 - 3 = 2$

2. adımda yapışık kenar sayısı: $5 \cdot 2 - 3 = 7$

3. adımda yapışık kenar sayısı: $5 \cdot 3 - 3 = 12$

4. adımda yapışık kenar sayısı: $5 \cdot 4 - 3 = 17$

...

x. adımda yapışık kenar sayısı $5x - 3$ olur.

Bunu bir fonksiyon kuralı olarak yazarsak $f:\mathbb{Z}^{+} \longrightarrow \mathbb{N},\ \ f(x) = 5x - 3$ fonksiyonunu elde ederiz.

b) 14 m bittiğinde kaç kenarın yapışık olduğunu bulmak için 14 m nin kaçıncı adımda bittiğini bulmamız gerekir.

Her bir kaldırım taşı 40 cm idi. 14 m = 1400 cm dir. $\frac{1400}{40} = 35$'tir. O hâlde 35. adımda 14 m biter. Buradan $f(35) = 5 \cdot 35 - 3 = 175 - 3 = 172$ kenarın birbirine yapışık olduğu bulunur.

c) $f(x) = 5x - 3$

$x = 5$ için $f(5) = 5 \cdot 5 - 3 = 25 - 3 = 22$

$x = 9$ için $f(9) = 5 \cdot 9 - 3 = 45 - 3 = 42$ olur.

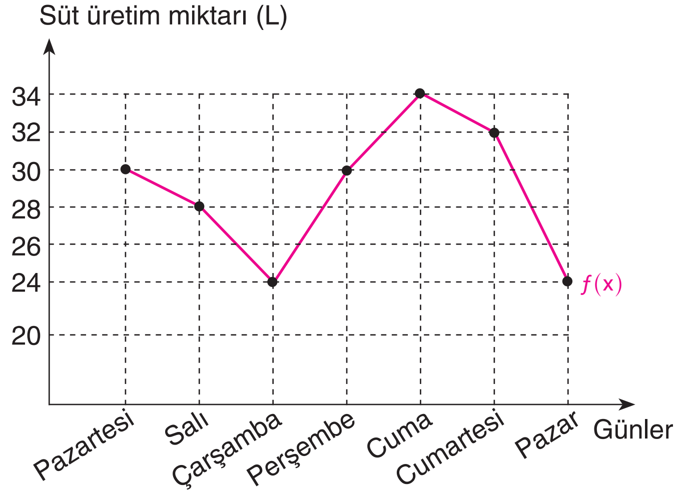
$[5,9]$ ndaki fonksiyonun ortalama değişim hızı $\frac{f(9) - f(5)}{9 - 5} = \frac{42 - 22}{4} = \frac{20}{4} = 5$ bulunur.

Örnek

Bir çiftçi, teşvik fonundan yararlanarak çiftliğine 3 inek alıyor. Bu çiftçinin günlük süt üretim miktarını gösteren grafik yandaki gibidir. Çiftçi, günlük üretilen sütün belli bir miktarını komşularına yardım amaçlı veriyor. Geriye kalan sütü mandıraya satıyor. Kazancından belli bir miktarı da vergisini ödemek için ayırıyor.

Grafiğe göre süt miktarının arttığı ve azaldığı günleri bulalım.

Grafik: Günlük Süt Üretim Miktarı



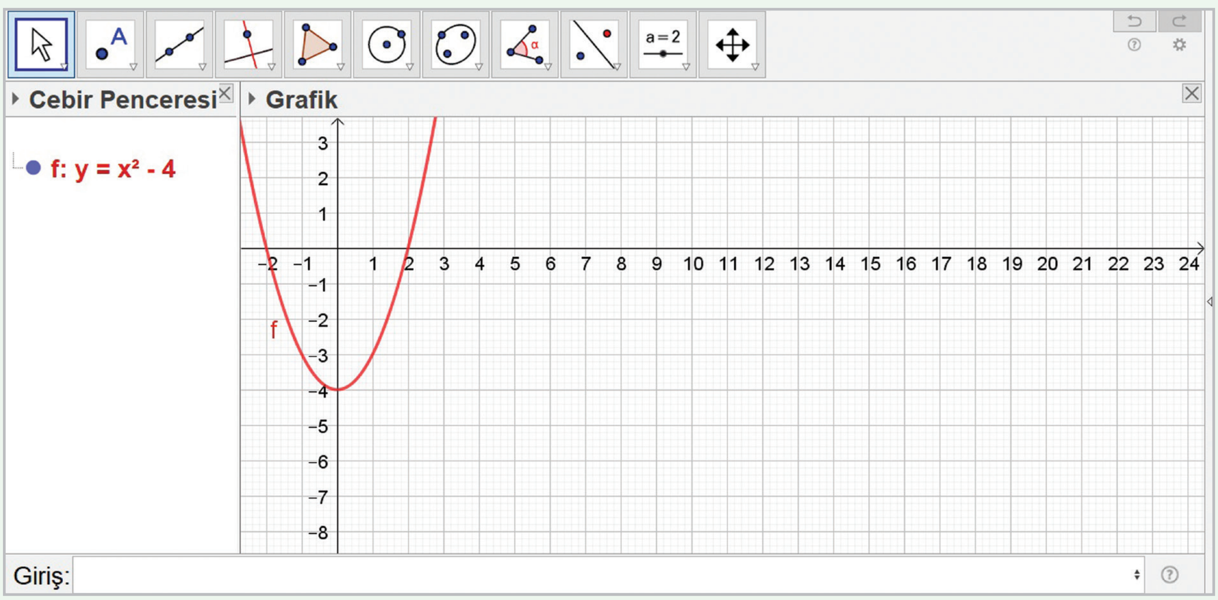
Çözüm

Grafiği incelediğimizde pazartesi-çarşamba ve cuma-pazar günleri arası süt üretim miktarı azalmıştır. Çarşamba-cuma günleri arası süt üretim miktarı artmıştır.

Bilgi-İletişim Teknolojisi

$y = x^2 - 4$ fonksiyonunu dinamik matematik yazılımını kullanarak bir dinamik matematik yazılımında çizelim.

Dinamik matematik yazılımını çalıştıralım. Giriş bölümüne $y = x^2 - 4$ fonksiyonunun yazıp Enter tuşuna basalım. Aşağıdaki grafiği elde ederiz.



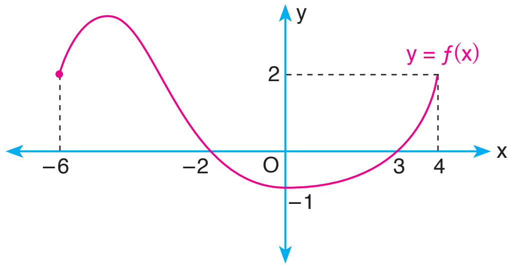
Grafiği incelediğimizde fonksiyon $(-\infty, 0)$ aralığında azalan ve $(0, \infty)$ aralığında artandır. Fonksiyonun minimum değerinin $f(0) = -4$ olduğu görülür.

Alıştırmalar 3-1

1. Yandaki grafikte verilenlere göre

a) $f(3a-5)=0$ denklemini sağlayan a değerlerini bulunuz.

b) $x \cdot f(x) \leq 0$ koşulunu sağlayan x tam sayılarının toplamını bulunuz.



2. Yandaki grafikte verilenlere göre

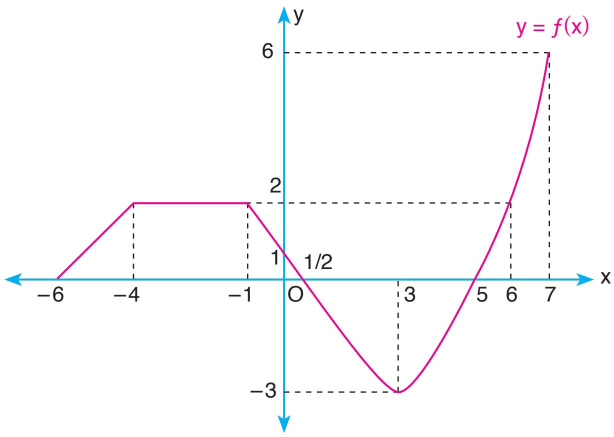
a) Fonksiyonun negatif değer ve pozitif değer aldığı aralıkları bulunuz.

b) Eksenleri kestiği noktaları bulunuz.

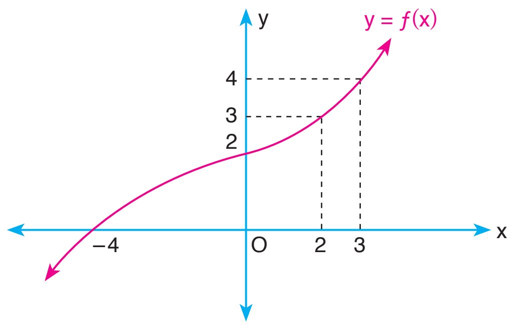
c) $f(a)=0$ koşulunu sağlayan a değerlerinin toplamını bulunuz.

ç) Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

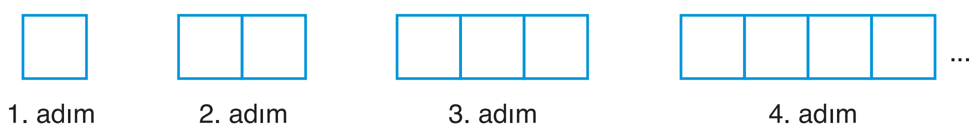
d) $f(x)$ fonksiyonun $[-6,7]$ aralığında maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.



3. Yanda, $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre fonksiyonun $[-4,3]$ aralığındaki ortalama değişim hızını bulunuz.



4.



Yukarıdaki gibi bir kenarı ortak olacak şekilde kareler çiziliyor. Her adımda kare sayısı 1 artıyor.

a) Adımlardaki doğru parçası sayısını veren fonksiyon kuralını bulunuz.

b) 20. adımdaki doğru parçası sayısını bulunuz.

c) Fonksiyonun $[3,5]$ ndaki ortalama değişim hızını bulunuz.

3.2. İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYONLAR VE GRAFİKLERİ

3.2.1. İkinci Dereceden Bir Değişkenli Fonksiyonlar ve Grafikleri

Bilgi

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonuna, **ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyon** denir.

İkinci dereceden fonksiyonların graflerine **parabol** denir.

Örnek

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^{a-2} + (a-1)x^{a-1} + a + 1$ kuralı ile verilen f fonksiyonu ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyon ise f fonksiyonunun kuralını bulalım.

Çözüm

f ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyon ise x in en büyük kuvveti 2 ve bu terimin katsayısının sıfırdan farklı olması gerekir.

$a - 2 < a - 1$ olduğundan $a - 1 = 2 \Rightarrow a = 3$'tür. Bu değeri $f(x)$ fonksiyonunda yerine yazalım.

$f(x) = 3 \cdot x^{3-2} + (3-1)x^{3-1} + 3 + 1 \Rightarrow f(x) = 3x + 2x^2 + 4 \Rightarrow f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ bulunur.

Örnek

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (a-2)x^3 + ax^2 + 2x - 1$ kuralı ile verilen f fonksiyonu ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyon olduğuna göre $f(a)$ değerini bulalım.

Çözüm

f ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyondur. Bu nedenle fonksiyonu oluşturan terimler arasında x^3 lü terim bulunmamalıdır. O hâlde x^3lü terimin katsayısı sıfır olmalıdır.

$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$ olur.

$f(x) = (2-2)x^3 + 2x^2 + 2x - 1$

$f(x) = 2x^2 + 2x - 1$ olur.

$f(a) = f(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 1$

$f(2) = 8 + 4 - 1$

$f(2) = 11$ bulunur.

Bilgi

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyonu, $f(x) = a(x-r)^2 + k$ biçiminde tam kare oluşturularak yazılabilir.

i) $a > 0$ için f fonksiyonu en küçük değeri alır. Bu değer $f(r) = k$ olur.

ii) $a < 0$ için f fonksiyonu en büyük değeri alır. Bu değer $f(r) = k$ olur.

Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 6x + 17$ ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyonun en büyük veya en küçük değerini bulalım.

Çözüm

f fonksiyonunun $f(x) = a(x-r)^2 + k$ biçiminde yazalım. $f(x) = x^2 + 6x + 17$ fonksiyonunun katsayıları $a = 1$, $b = 6$ ve $c = 17$ olmak üzere f fonksiyonunu tam kare yapmak için f fonksiyonuna $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{6}{2 \cdot 1}\right)^2 = 9$ ekleyip çıkaralım.

$f(x) = x^2 + 6x + 17 + 9 - 9$

$f(x) = x^2 + 6x + 9 + 8$

$f(x) = (x+3)^2 + 8$ olur. Buradan $-r = 3 \Rightarrow r = -3$ ve $k = 8$ olur.

$a = 1 > 0$ olduğundan $f(-3) = (-3+3)^2 + 8 = 8$ değeri, fonksiyonun alabileceği en küçük değerdir.

Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 - 4x + m$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun en büyük değeri 19 ise m değerini bulalım.

Çözüm

$f(x) = -x^2 - 4x + m$, fonksiyonunun katsayıları $a = -1$, $b = -4$ ve $c = m$ olur. $f(x)$ fonksiyonundan tam kare elde etmek için f fonksiyonuna $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{-4}{2 \cdot (-1)}\right)^2 = 4$ ekleyip çıkaralım.

Buradan $f(x) = -x^2 - 4x - 4 + 4 + m$

$f(x) = -(x^2 + 4x + 4) + 4 + m$

$f(x) = -(x+2)^2 + 4 + m$ elde edilir. Buradan $-r = 2 \Rightarrow r = -2$ ve $k = 4 + m$ olur.

$a = -1 < 0$ olduğundan $f(r) = k$ fonksiyonunun alacağı en büyük değerdir. f fonksiyonunun en büyük değeri 19 olduğuna göre $f(-2) = -(-2+2)^2 + 4 + m = 19$

$4 + m = 19$

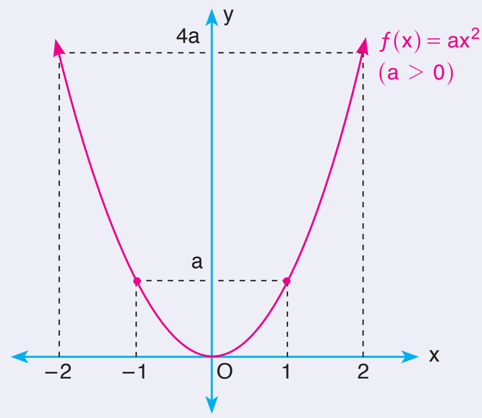
$m = 15$ bulunur.

a) Kuralı $y = f(x) = ax^2$ Olan Fonksiyonların Grafiği

Bilgi

• $a > 0$ ise $f(x) = ax^2$nin değişim tablosu

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	∞
$y = f(x) = ax^2$	$+\infty$	4a	a	0	a	4a	∞



şeklindedir. Burada fonksiyon $(-\infty, 0]$ nda azalan ve $[0, \infty)$ nda artandır.

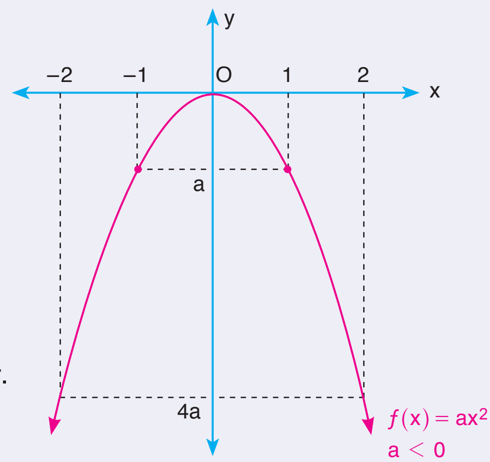
Her $x \in \mathbb{R}$ için $y = f(x) = ax^2 \geqslant 0$ olur.

Parabolün kolları yukarı doğrudur.

Tepe noktası O(0,0) dır.

• $a < 0$ ise $f(x) = ax^2$nin değişim tablosu

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$y = f(x) = ax^2$	$-\infty$	4a	a	0	a	4a	$-\infty$



şeklindedir. Burada fonksiyon $(-\infty, 0]$ nda artan ve $[0, \infty)$ nda azalandır.

Her $x \in \mathbb{R}$ için $y = f(x) = ax^2 \leqslant 0$ olur.

Parabolün kolları aşağı doğrudur. Tepe noktası O(0,0) dır.

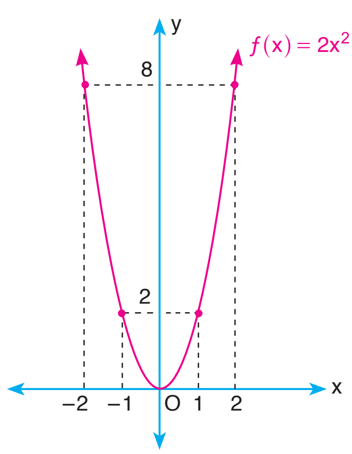
Örnek

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

f fonksiyonunun değişim tablosunu yapalım.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	∞
$y = f(x) = 2x^2$	∞	8	2	0	2	8	∞



$a = 2 > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur. Tepe noktası $O(0,0)$ dır. Fonksiyonun grafiği yandaki gibi olur.

Örnek

$f, g, h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 2x^2$ kuralları ile verilen f, g, h fonksiyonlarının grafiklerini aynı analitik düzlemde çizelim.

Çözüm

$f(x) = \frac{1}{2}x^2$ nin değişim tablosu

x	$-\infty$	-1	0	1	∞
$f(x) = \frac{1}{2}x^2$	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	∞

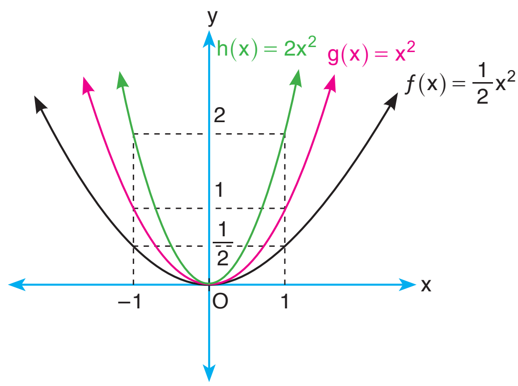
$a = \frac{1}{2} > 0$ olduğundan kollar yukarı doğrudur. Tepe noktası O(0,0) dır.

$g(x) = x^2$ nin değişim tablosu

x	$-\infty$	-1	0	1	∞
$g(x) = x^2$	$+\infty$	1	0	1	∞

$a = 1 > 0$ olduğundan kollar yukarı doğrudur.

Tepe noktası O(0,0) dır.



$h(x) = 2x^2$ nin değişim tablosu

x	$-\infty$	-1	0	1	∞
$h(x) = 2x^2$	$+\infty$	2	0	2	∞

$a = 2 > 0$ olduğundan kollar yukarı doğrudur. Tepe noktası O(0,0) dır.

Bu üç fonksiyonunun aynı analitik düzlemdeki grafiği yukarıdaki gibi olur.

Bilgi

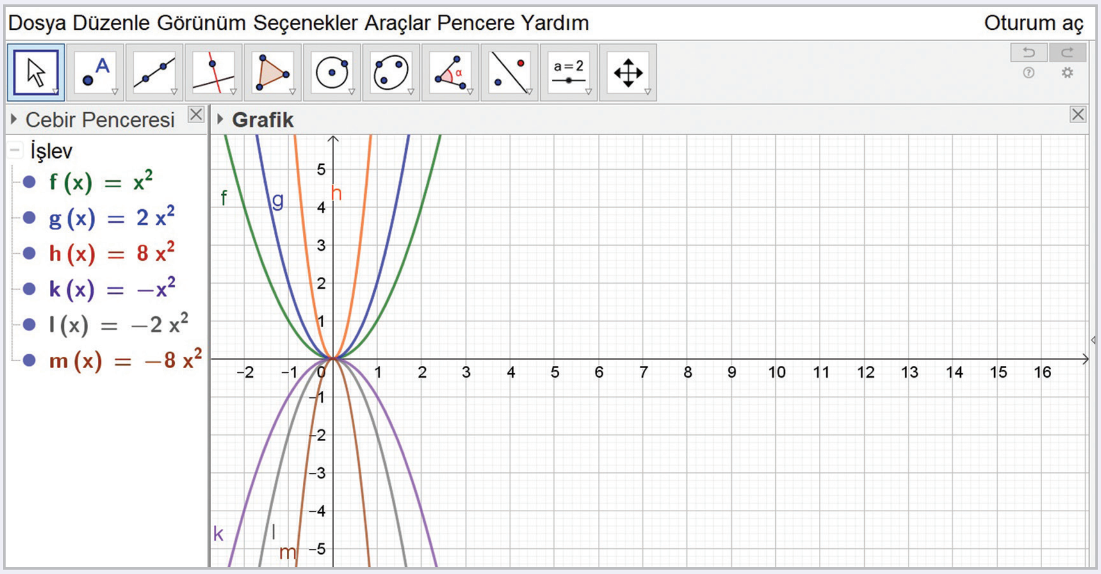
$f(x) = ax^2$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiğinde;

$a > 0$ iken a büyüdükçe parabolün kolları y eksenine yaklaşır, a küçüldükçe parabolün kolları y ekseninden uzaklaşır.

$a < 0$ iken a büyüdükçe parabolün kolları y ekseninden uzaklaşır, a küçüldükçe parabolün kolları y eksenine yaklaşır.

Bilgi

Dinamik matematik yazılımını çalıştıralım. Giriş bölümüne sırasıyla $f(x)=x^2$, $g(x)=2x^2$, $h(x)=8x^2$, $k(x)=-x^2$, $l(x)=-2x^2$ ve $m(x)=-8x^2$ yazıp Enter tuşuna bastığımızda aşağıdaki grafikleri elde ederiz.



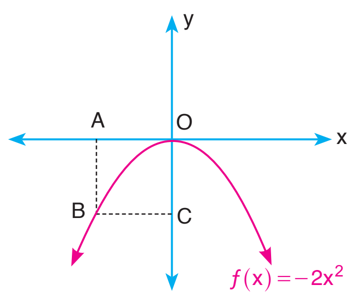
$a > 0$ için a nın değeri büyüdükçe kuralı $f(x)=ax^2$ olan f fonksiyonunun grafiğinin kolları y eksenine yaklaşmaktadır.

$a < 0$ için a nın değeri küçüldükçe kuralı $f(x)=ax^2$ olan f fonksiyonunun grafiğinin kolları y eksenine yaklaşmaktadır.

Örnek

Yandaki şekilde, $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=-2x^2$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

ABCO kare olduğuna göre ABCO karesinin alanının kaç br^2 olduğunu bulalım.



Çözüm

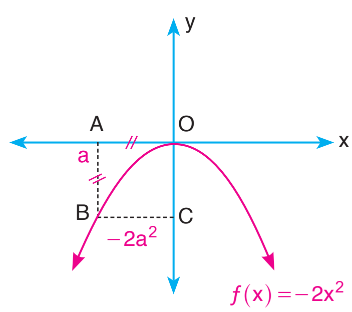
B noktası parabolün üzerindedir. A noktasının apsisine a dersek $f(x)=-2a^2$ olduğundan $B(a,-2a^2)$ dir.

ABCO kare olduğundan

$|OA|=|AB| \Rightarrow |a|=|-2a^2|$ ($a<0$ olduğundan)

$$-a=2a^2 \text{ ise } a=-\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Uzunluk negatif olmayacağından $|AO|=|AB|=\frac{1}{2}$ br olur. Buradan $A(ABCO)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ br^2 bulunur.



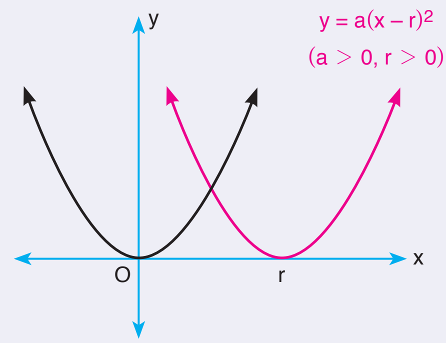
b) Kuralı $y = f(x) = a(x-r)^2$ Olan Fonksiyonların Grafiği

Bilgi

$y = f(x) = a(x-r)^2$ nin grafiği $x = r$ noktasında x eksenine teğettir.

Grafiğin eksenleri kestiği noktalar bulunur.

$a > 0$ ise grafiğin kolları yukarı, $a < 0$ ise grafiğin kolları aşağıya doğrudur.



Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

$y = f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2$

$x = 0$ için $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (0-2)^2$

$y = -2$'dir.

$y = 0$ için $0 = -\frac{1}{2}(x-2)^2 \Rightarrow 0 \Rightarrow x = 2$ olur.

Fonksiyonun grafiği x eksenine $(2,0)$ noktasında teğettir.

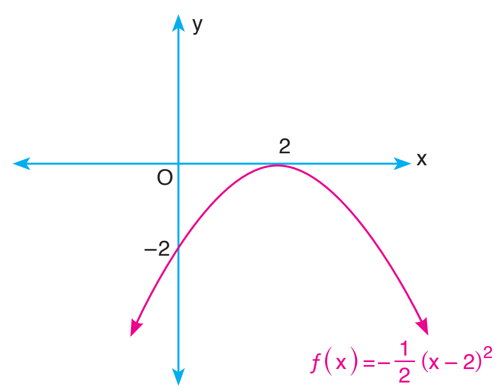
Fonksiyonun grafiği, y eksenini $(0,-2)$ noktasında keser.

$a = -\frac{1}{2}$ olup fonksiyon grafiğinin kolları aşağıya doğrudur.

Fonksiyonun grafiği yandaki gibidir.

$a < -\frac{1}{2}$ olduğundan fonksiyonun en büyük değeri vardır.

Bu değer $y = 0$ değeridir.



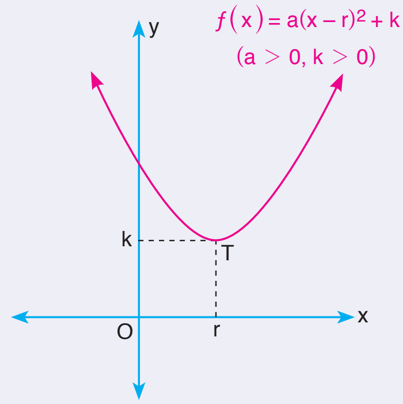
c) Kuralı $y = f(x) = a(x - r)^2 + k$ Olan Fonksiyonların Grafiği

Bilgi

$y = f(x) = a(x-r)^2 + k$ nin grafiğinin tepe noktası $T(r, k)$ dir.

$x = 0$ için y, $y = 0$ için x değeri bulunarak (varsa) eksenleri kesen noktalar belirlenir.

$a > 0$ ise f fonksiyonunun grafiğinin kolları yukarıya $a < 0$ ise fonksiyonun grafiğinin kolları aşağıya doğrudur.



Örnek

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2(x-1)^2 + 2$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

$f(x) = y = 2(x-1)^2 + 2$

Grafiğin tepe noktası $T(r, k) = T(1, 2)$ dir.

$x = 0$ için $y = 2 \cdot (0-1)^2 + 2 = 2 \cdot (-1)^2 + 2 = 4$ olur.

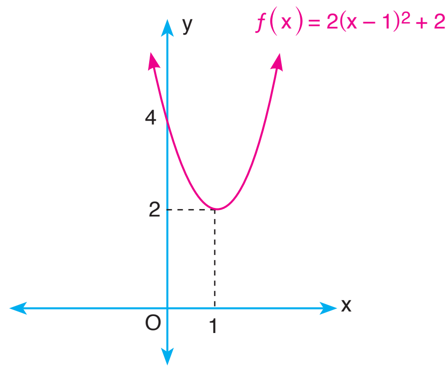
Grafik, y eksenini $(0, 4)$ noktasında keser.

$y = 0$ için $0 = 2(x-1)^2 + 2 \Rightarrow -2 = 2(x-1)^2$

$\Rightarrow (x-1)^2 = -1 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ olduğundan bu denklemin kökü yoktur. Grafik, x eksenini kesmez.

$a = 2 > 0$ olduğundan grafiğin kolları yukarı doğrudur.

Fonksiyonun grafiği yandaki gibidir.



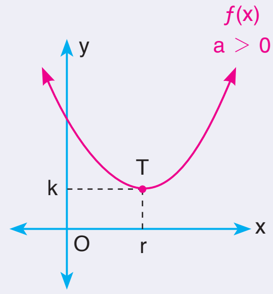
Bilgi

• $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ ikinci dereceden fonksiyonun grafiğine **parabol** demiştik. Fonksiyonun alacağı en büyük ya da en küçük değeri veren noktaya **tepe noktası** denir.

• $a > 0$ ise tepe noktasının ordinatı, fonksiyonun en küçük değeri; $a < 0$ ise en büyük değeridir.

• $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonu $f(x) = a(x-r)^2 + k$ biçiminde yazılırsa grafiğinin tepe noktası $T(r, k)$ ile gösterilir. $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda r ve k değerleri, $r = -\dfrac{b}{2a}$ ve $k = f(r) = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ bağıntılarıyla bulunur.

• $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün simetri ekseninin denklemi $x = r$ olur.



Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2 + 6x - 5$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun en küçük değerini bulalım.

Çözüm

$f(x) = 2x^2 + 6x - 5$ fonksiyonunun katsayıları $a = 2,\ b = 6$ ve $c = -5$ olur.

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{2}$$

$$k = f(r) = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 2 \cdot (-5) - 6^2}{4 \cdot 2} = \frac{-40 - 36}{8} = \frac{-76}{8} = -\frac{19}{2} \text{ olur.}$$

Buradan $T(r, k) = T\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{19}{2}\right)$ bulunur.

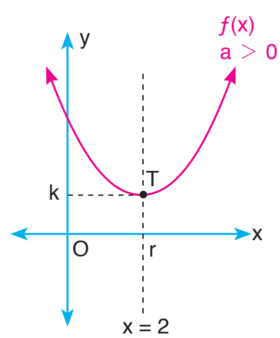
$a = 2 > 0$ olduğundan f fonksiyonunun en küçük değeri vardır. Bu değer $-\dfrac{19}{2}$ olur.

Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2 + (m-2)x + 16$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiğinin simetri ekseni $x = 2$ doğrusu olduğuna göre tepe noktasının ordinatını bulalım.

Çözüm

Tepe noktası $T(r, k)$ olmak üzere $x = r$ doğrusu f fonksiyonunun grafiğinin simetri eksenidir.



$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{(m-2)}{2 \cdot 3} = -\frac{(m-2)}{6} = 2 \Rightarrow -(m-2) = 12$$

$$m - 2 = -12$$

$$m = -10 \text{ olur.}$$

$f(x) = 3x^2 + (-10-2)x + 16$

$f(x) = 3x^2 - 12x + 16$

$k = f(r) \Rightarrow k = f(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 16$

$k = f(2) = 12 - 24 + 16$

$k = 4$ bulunur.

E-İçerik

ç) Kuralı $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ Olan Fonksiyonların Grafiği

Bilgi

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ nin grafiği çizilirken aşağıdaki adımlar izlenir.

- Parabolün kollarının yönü tespit edilir.

$a > 0$ ise kollar yukarı doğrudur.

$a < 0$ ise kollar aşağı doğrudur.

- Parabolün tepe noktası $T(r, k)$ bulunur.
- Parabolün eksenleri kestiği noktalar bulunur.

$x = 0 \Rightarrow f(0) = c$ dir. Parabol, y eksenini $(0, c)$ noktasında keser.

$y = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$ olur. Burada

$\Delta < 0$ ise parabol, x eksenini kesmez.

$\Delta = 0$ ise parabol, x eksenine teğettir.

$\Delta > 0$ ise parabol, x eksenini farklı iki noktada keser.

Elde edilen bilgiler ve noktalar kullanılarak parabol çizilir.

Örnek

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiğini çizelim. Fonksiyonun en küçük değerini bulalım.

Çözüm

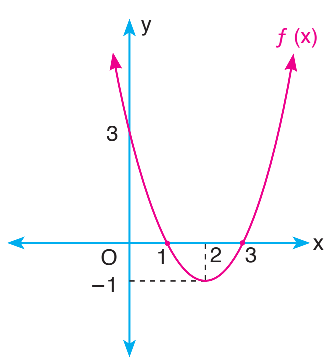
$f(x) = x^2 - 4x + 3$ için f fonksiyonunda

- $a = 1 > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur.
- Tepe noktası $T(r, k)$ olmak üzere

  $r = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{(-4)}{2 \cdot 1} = 2$ dir.

  $k = f(r) \Rightarrow k = f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$'dir.

  $T(2, -1)$ olur.
- $x = 0$ için $f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$ olduğundan



parabol y eksenini $(0, 3)$ noktasında keser.

$y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3$ veya $x = 1$ olur.

$-1 \quad -3$

x eksenini $(3, 0)$ ve $(1, 0)$ noktalarında keser. O hâlde grafik yukarıdaki gibi olur.

$a = 1 > 0$ olduğundan fonksiyonun en küçük değeri vardır. Bu değer $k = -1$ olur.

Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 3$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiğini çizelim. Fonksiyonunun <u>en büyük</u> değerini bulalım.

Çözüm

$f(x) = -x^2 + 3$

$a = -1,\ b = 0,\ c = 3$

$r = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{0}{2\cdot(-1)} = 0$

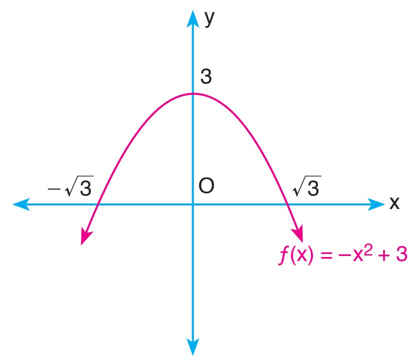
$k = f(r) = -0^2 + 3 \Rightarrow k = 3$ olur.

Fonksiyon grafiğinin tepe noktası $T(r,k) = T(0,3)$ olur.

Grafiğin x eksenleri kestiği noktaları bulalım.

$x = 0$ için $y = f(0) = -0^2 + 3 = 3$

$y = 0$ için $-x^2 + 3 = 0 \Rightarrow -x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \mp\sqrt{3}$ olur.



Grafik, x eksenini $(0, -\sqrt{3})$ ve $(0, \sqrt{3})$ noktasında; y eksenini $(0,3)$ noktasında keser.

$a = -1 < 0$ olduğundan grafiğin kolları aşağı doğrudur.

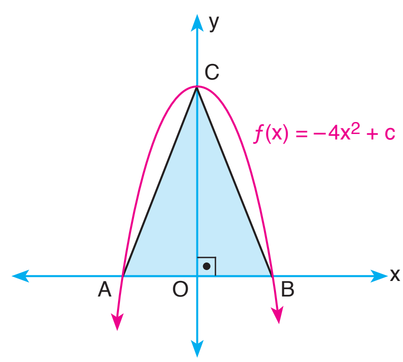
Fonksiyonun grafiği yukarıdaki gibidir.

Burada $a < 0$ olduğundan fonksiyonun en büyük değeri $f(r) = k = 3$ olur.

> $y = ax^2 + c$ fonksiyonunun tepe noktası y ekseni üzerindedir ve $T(0,c)$ dir.

Örnek

Yandaki şekilde $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},,\ f(x) = -4x^2 + c$ nin grafiği verilmiştir. Fonksiyonun aldığı en büyük değer 16 olduğuna göre fonksiyonun tepe noktasını ve x eksenini kestiği noktaları köşe kabul eden üçgenin alanının kaç br^2 olduğunu bulalım.



Çözüm

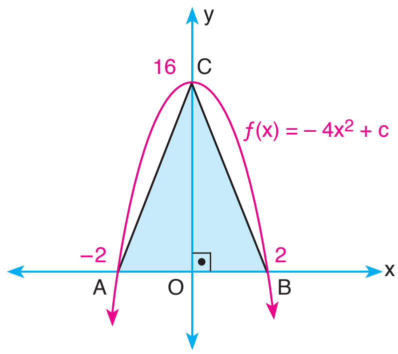
Fonksiyonun aldığı en büyük değer tepe noktasının ordinatıdır. O hâlde $T(0,c)=T(0,16)$ olduğundan $c=16$ olur. Buradan $y=-4x^2+16$'dır. Fonksiyonun x eksenini kestiği noktaların apsislerini bulalım.

$y=0$ için $y=-4x^2+16 \Rightarrow -4x^2+16=0$

$\Rightarrow -4x^2=-16 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=-2$ ve $x=2$ olur.

$[CO]\perp[AB]$ ve $|CO|=16$ br, $|AB|=4$ br olacağından

$A(\widehat{ABC})=\dfrac{|AB|\cdot|CO|}{2}=\dfrac{4\cdot 16}{2}=32\ br^2$ bulunur.



Örnek

$A=[-3,2]$ olmak üzere $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x-5$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiğini çizip bu aralıkta en büyük ve en küçük değerlerini bulalım.

Çözüm

Önce f in grafiğini çizelim ve istenilen tanım kümesinde grafiğin parçasını alalım.

- $a=1>0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur.
- $r=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{4}{2\cdot 1}=-2$

  $k=f(r)\Rightarrow k=f(-2)=(-2)^2+4\cdot(-2)-5$

  $k=f(-2)=4-8-5$

  $k=f(-2)=-9$

  $T(r,k)=T(-2,-9)$ olur.
- $x=0$ için $y=f(0)=0^2+4\cdot 0-5=-5$ olduğundan

  grafik, y eksenini (0,–5) noktasında keser.

  $y=0$ için $x^2+4x-5=0\Rightarrow (x+5)\cdot(x-1)=0$

  Buradan $x=-5$ veya $x=1$ bulunur.

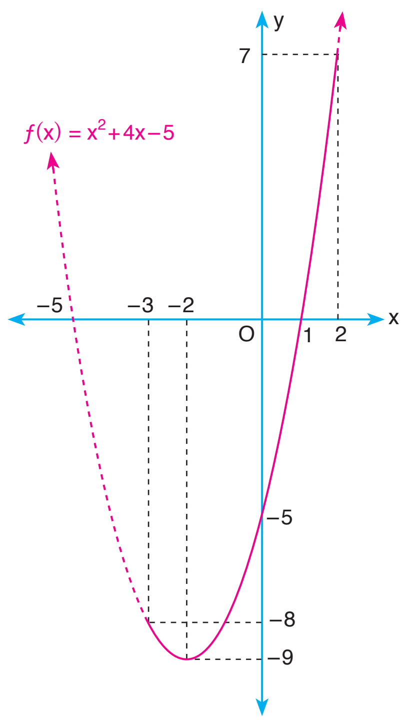
  Grafik x eksenini $(-5,0)$ ve $(1,0)$ noktalarında keser.

  $f(-3)=(-3)^2+4\cdot(-3)-5$

  $f(-3)=9-12-5=-8$

  $f(2)=2^2+4\cdot 2-5$

  $f(2)=4+8-5=7$



Grafikten de görüldüğü gibi fonksiyonun bu aralıktaki en küçük değeri tepe noktasının ordinatı olan -9, en büyük değer ise $f(2)=7$ değeridir.

Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 6x + m + 4$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiği x eksenine teğet ise m değerini bulup fonksiyonun grafiğini çizelim.

Çözüm

f fonksiyonun grafiği x eksenine teğet ise $y = 0$ için $x^2 - 6x + m + 4 = 0$ ikinci derece denkleminin diskriminantı sıfırdır.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m + 4) = 0$$
$$36 - 4m - 16 = 0$$
$$20 - 4m = 0$$
$$-4m = -20$$
$$m = 5 \text{ bulunur.}$$

Buradan $f(x) = x^2 - 6x + 9$ elde edilir.

Bu fonksiyonun grafiğini çizelim.

- $a = 1 > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur.
- Tepe noktası $T(r, k)$ olmak üzere

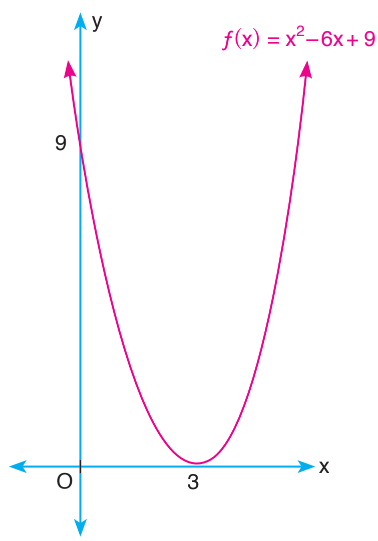
$$r = -\frac{b}{2a} \Rightarrow r = -\frac{(-6)}{2 \cdot 1} = 3,$$
$$k = f(r) \Rightarrow k = f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 9$$
$k = f(3) = 0$ olur. $T(3, 0)$ dır.

- $x = 0$ için $y = f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 9$

$y = f(0) = 9$ ise grafik y eksenini $(0, 9)$ noktasında keser.

$y = 0$ için $x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 0$ olur.

O hâlde fonksiyonun grafiği, $x = 3$ noktasında x eksenine teğettir. Bu bilgileri kullanarak grafiği çizdiğimizde yandaki grafiği elde ederiz.



Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + mx + n$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiği x eksenini $(1, 0)$ ve $(-3, 0)$ noktalarında kestiğine göre bu fonksiyonun grafiğini çizelim.

Çözüm

f fonksiyonunun grafiği x eksenini $(1, 0)$ ve $(-3, 0)$ noktalarında kestiğine göre

$y = 0$ için $x^2 + mx + n = 0$ denkleminin kökleri $x_1 = 1$ ve $x_2 = -3$ olur. Buradan kökleri bilinen ikinci derece denklemi yazarsak

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x^2 - (1 + (-3))x + 1 \cdot (-3) = 0$$
$$x^2 + 2x - 3 = 0 \text{ olur.}$$

O hâlde $m = 2$ ve $n = -3$'tür. Bu değerler için $f(x) = x^2 + 2x - 3$ olur.

$f(x) = x^2 + 2x - 3$'ün grafiğini çizelim.

- $a = 1 > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur.
- Tepe noktası $T(r, k)$ olmak üzere

$$r = -\frac{b}{2a} \Rightarrow r = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1$$

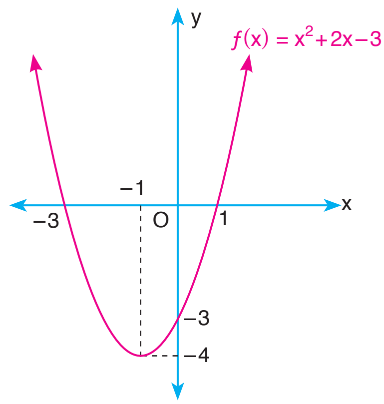
$$k = f(r) \Rightarrow k = f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3$$

$$k = f(-1) = 1 - 2 - 3$$

$k = f(-1) = -4$ olduğundan $T(-1, -4)$ olur.

- $x = 0$ için $y = f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 3 = -3$ ise fonksiyonun grafiği y eksenini $(0, -3)$ noktasında keser. x eksenini kestiği noktalar $(1, 0)$ ve $(-3, 0)$ olarak verilmiştir.

Bu durumda $f(x) = x^2 + 2x - 3$'ün grafiği yandaki gibi olur.



Örnek

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) = a(x-2) \cdot (x+4)$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiği $(1, 10)$ noktasından geçtiğine göre bu fonksiyonun grafiğini çizelim.

Çözüm

f in grafiği $(1, 10)$ noktasında geçtiğine göre $(1, 10)$ noktası fonksiyonun denklemini sağlar. Buradan $a(1-2) \cdot (1+4) = 10 \Rightarrow -5a = 10 \Rightarrow a = -2$ olur.

$$f(x) = -2(x-2) \cdot (x+4) \Rightarrow f(x) = -2(x^2 + 2x - 8)$$

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 16 \text{ olur.}$$

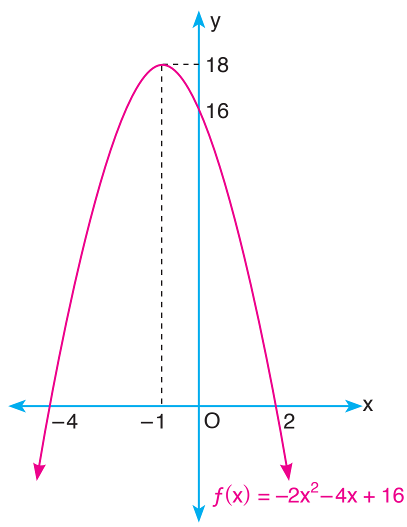
Şimdi $f(x) = -2x^2 - 4x + 16$ nın grafiğini çizelim.

- $a = -2 < 0$ olduğundan parabolün kolları aşağı doğrudur.
- Tepe noktası $T(r, k)$ olmak üzere

$$r = -\frac{b}{2a} \Rightarrow r = -\frac{(-4)}{2 \cdot (-2)} = \frac{4}{-4} = -1 \text{ dir.}$$

$$k = f(r) \Rightarrow k = f(-1) = -2(-1)^2 - 4(-1) + 16$$

$k = f(-1) = -2 + 4 + 16 = 18$ olur. $T(-1, 18)$'dir.



- $x = 0$ için $y = f(0) = -2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 16$

$y = f(0) = 16$ ise fonksiyonunun grafiği y eksenini $(0, 16)$ noktasında keser.

$y = f(x) = -2(x-2) \cdot (x+4)$ denkleminde

$y = 0$ için $-2(x-2) \cdot (x+4) = 0$ denkleminin kökleri

$x_1 = 2$, $x_2 = -4$ olduğundan f fonksiyonunun grafiği x eksenini $(2, 0)$ ve $(-4, 0)$ noktalarında keser. O hâlde fonksiyonun grafiği yukarıdaki gibi olur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = mx^2 + 6x + 12$ fonksiyonunun x eksenini iki noktada kesmesi için m nin alacağı değerleri bulalım.

ÇÖZÜM

$\Delta > 0$ olmalıdır.

$b^2 - 4ac > 0$

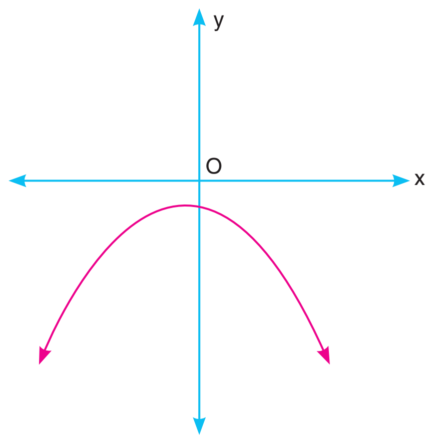
$6^2 - 4 \cdot m \cdot 12 > 0 \Rightarrow 36 - 36m > 0 \Rightarrow 36 > 36$

$\Rightarrow m < 1$ olur.

Öyleyse m değerleri 1'den küçük olmalıdır. $Ç = (-\infty , 1)$ olur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = mx^2 - 4x - 3$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiği yandaki gibi olduğuna göre m nin alacağı değerleri bulalım.



ÇÖZÜM

$\Delta < 0$ olmalıdır.

$b^2 - 4ac < 0$

$(-4)^2 - 4 \cdot m \cdot (-3) < 0 \Rightarrow 16 + 12m < 0 \Rightarrow 3m + 4 < 0$

$\Rightarrow m < -\frac{4}{3}$ olur.

Parabolün kollarının aşağı doğru olması için $m < 0$ olmalıdır.

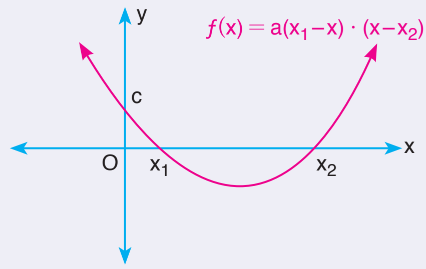
$m < -\frac{4}{3}$ ve $m < 0$ şartlarının her ikisini sağlayan ifade, $m < -\frac{4}{3}$ olduğundan $Ç = \left(-\infty , -\frac{4}{3}\right)$ olur.

Paarabolün Denklemi

a) x Eksenini İki Noktada Kesen ve Bir Noktası Bilenen Parabolün Denklemi

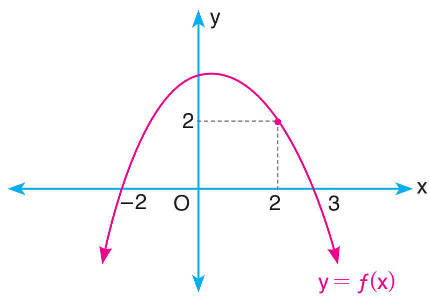
Bilgi

x eksenini x_1 ve x_2 apsisli noktalarda kesen parabolün denklemi $f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ biçimindedir. Grafik (b, c) noktasından geçtiğinden (b, c) noktası parabolün denkleminde yerine yazılarak a katsayısı bulunur.



Örnek

Yanda grafiği verilen parabolün denklemini bulalım.



Çözüm

Grafik x eksenini −2 ve 3 apsisli noktalarda kestiğinden parabolün denklemi,

$f(x) = a(x+2)(x-3)$ biçimindedir. Grafik $(2,2)$ noktasında geçtiğinden bu nokta, denklemi sağlar. O hâlde $(2,2)$ noktasını denklemde yerine yazalım.

$$a(x+2)(x-3) = y \Rightarrow a(2+2)(2-3) = 2$$

$$-4a = 2$$

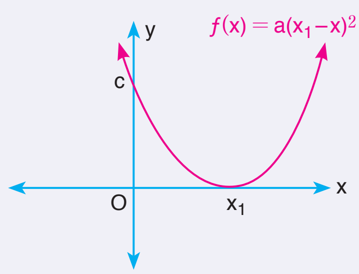
$$a = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$ olur. Buradan

$f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x-3)$ parabolün denklemini elde ederiz.

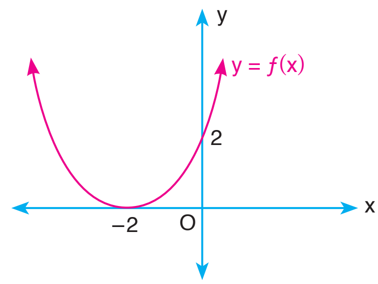
b) x Eksenine Teğet Olduğu Noktası ve Bir Noktası Bilinen Parabolün Denklemi

Bilgi

x eksenine x_1 apsisli noktada teğet olan parabolün denklemi $f(x) = a(x - x_1)^2$ biçimindedir. Geçtiği bir nokta $(0, c)$ olsun. Bu nokta denklemde yerine yazılarak a katsayısı bulunur.



Örnek



Yanda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre denklemini bulalım.

Çözüm

Parabol -2 apsisli noktada x eksenine teğettir.

O hâlde parabolün denklemi $f(x) = a(x-(-2))^2 = a(x+2)^2$ biçimindedir.

$(0,2)$ noktasından geçtiğinden bu noktayı denklemde yerine yazalım.

$a(x+2)^2 = y \Rightarrow a(0+2)^2 = 2$

$$4a = 2$$

$$a = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

Buradan $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2$ parabolün denklemi elde edilir.

Örnek

x eksenine $x = 1$ apsisli noktada teğet olan parabolün grafiği $(2,-4)$ noktasından geçtiğine göre parabolün denklemini bulalım.

Çözüm

Grafik x eksenine $x = 1$ apsisli noktada teğet olduğundan parabolün denklemi $f(x) = a(x-1)^2$ biçimindedir. f fonksiyonunun grafiği $(2,-4)$ noktasından geçtiğinden, bu nokta parabolün denklemini sağlar. O hâlde $a(x-1)^2 = y \Rightarrow a(2-1)^2 = -4$

$$a = -4 \text{ bulunur.}$$

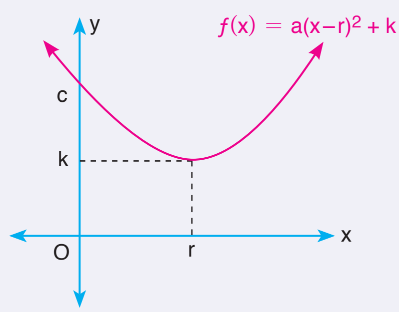
Buradan $f(x) = -4(x-1)^2$ parabol denklemi elde edilir.

c) Tepe Noktası ve Bir Noktası Bilinen Parabolün Denklemi

Bilgi

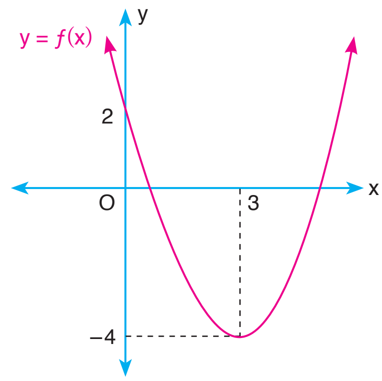
Tepe noktası ile herhangi bir noktası verilen parabolün denklemi $y = f(x) = a(x-r)^2 + k$ şeklindedir.

Yanda verilen grafikteki gibi $(0,c)$ in noktası parabolün üzerinde olduğundan bu nokta parabol denkleminde yerine yazılarak a sayısı bulunur.



Örnek

Yanda grafiği verilen parabolün denklemini bulalım.



Çözüm

Parabolün tepe noktası verildiğinden denklemi,

$f(x) = a(x - r)^2 + k$ biçimindedir.

O hâlde $y = a(x - 3)^2 + (-4) \Rightarrow y = a(x - 3)^2 - 4$ olur.

Parabol $(0,2)$ noktasından geçtiğine göre bu noktayı parabol denklemde yerine yazalım.

Buradan $y = a(x - 3)^2 - 4 \Rightarrow 2 = a(0 - 3)^2 - 4$

$$9a = 2 + 4$$

$$9a = 6$$

$$a = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$ olur. Buradan

$y = f(x) = \frac{2}{3}(x - 3)^2 - 4$ parabolün denklemini elde ederiz.

Örnek

Tepe noktası $(1,2)$ olan ve $(3,-6)$ noktasından geçen parabolün denklemini bulup grafiğini çizelim.

Çözüm

Parabolün tepe noktası verildiğinden denklemi, $y = a(x - r)^2 + k$ biçimindedir.

Tepe noktası $(1,2)$ olduğundan $y = a(x - 1)^2 + 2$ olur. Parabol $(3,-6)$ noktasından geçtiğinden

$y = a(x - 1)^2 + 2 \Rightarrow -6 = a(3 - 1)^2 + 2$

$$4a = -6 - 2$$

$$4a = -8$$

$a = -2$ olur. O hâlde $y = -2(x - 1)^2 + 2$ bulunur.

Şimdi $y = -2(x - 1)^2 + 2$ nin grafiğini çizelim.

- $a = -2 < 0$ olduğundan parabolün kolları aşağı doğrudur.
- Tepe noktası $T(1,2)$ dir.
- $x = 0$ için $y = f(0) = -2(0 - 1)^2 + 2$

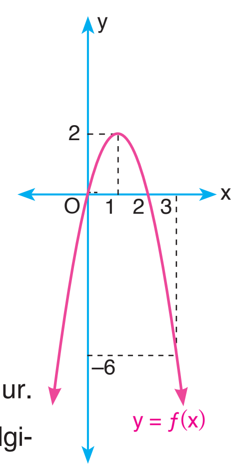
  $y = -2 + 2 = 0$ olduğundan

fonksiyonun grafiği $(0,0)$ noktasından geçer.

$y = 0$ için $-2(x - 1)^2 + 2 = 0$

$$-2(x - 1)^2 = -2$$

$(x - 1)^2 = 1, \Rightarrow x + 1 = -1$ veya $x + 1 = 1 \Rightarrow x = 2$ veya $x = 0$ olur.



O hâlde fonksiyonun grafiği, x eksenini $(0,0)$ ve $(2,0)$ noktalarında keser. Bu bilgiler kullanılarak çizilen grafik yukarıdaki gibi olur.

ç) Biri y Ekseni Üzerinde Olmak Üzere Üç Noktası Bilinen Parabolün Denklemi

Bilgi

Herhangi üç noktası verilen parabolün denklemi bulunurken parabolün denklemi,

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ biçiminde yazılır. Verilen noktalar $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ denkleminde x yerine yazılarak elde edilen denklem sistemi çözülüp a, b ve c katsayıları bulunur.

Örnek

$A(4,6)$, $B(1,0)$ noktalarından geçen ve y eksenini $C(0,6)$ noktasında kesen parabolün denklemini bulup grafiğini çizelim.

Çözüm

Parabolün geçtiği üç nokta verildiğinden parabolün denklemi, $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ olsun.

$y = f(x)$ in grafiği y eksenini $C(0,6)$ noktasında kestiğinden

$x = 0$ için $y = f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 6$ ise $c = 6$ olur.

Buradan denklem $y = f(x) = ax^2 + bx + 6$ biçimine dönüşür. Şimdi parabolün fonksiyonun geçtiği diğer noktaları kullanarak a ve b katsayılarını bulalım.

$y = f(x) = ax^2 + bx + 6$ parabol, $A(4,6)$ noktasından geçtiğinden

$x = 4$ için $y = f(4) = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + 6 = 6 \Rightarrow 16a + 4b = 0 \ldots (I)$

Parabol $B(1,0)$ noktasından geçtiğinden

$x = 1$ için $y = f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 6 = 0 \Rightarrow a + b = -6 \ldots (II)$

(I) ve (II) denklemlerini birlikte çözelim.

$$
\begin{array}{r}
16a + 4b = 0 \\
-4 \;/\; a + b = -6 \\
\hline
16a + \cancel{4b} = 0 \\
+ \quad -4a - \cancel{4b} = 24 \\
\hline
12a = 24
\end{array}
$$

$a = 2$ bulunur.

Bu değeri denklemlerden birinde yerine yazalım.

$a + b = -6 \Rightarrow 2 + b = -6$ ise $b = -8$ olur. O hâlde $y = f(x) = 2x^2 - 8x + 6$ bulunur.

Şimdi, bulduğumuz $y = f(x) = 2x^2 - 8x + 6$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

- $a = 2 > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur.
- Tepe noktası $T(r,k)$ olmak üzere

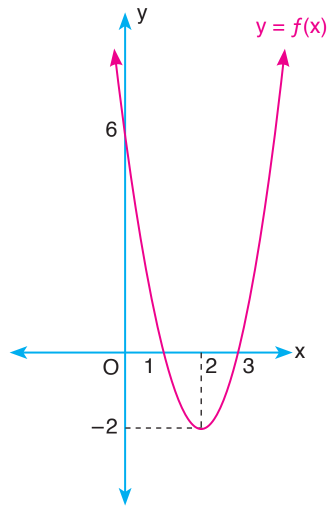
$r = -\frac{b}{2a} \Rightarrow r = -\frac{(-8)}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2$ olur.

$k = f(r) \Rightarrow k = f(2) = 2 \cdot (2)^2 - 8 \cdot 2 + 6$

$k = f(2) = 8 - 16 + 6 = -2$ olduğundan $T(2,-2)$ dir.

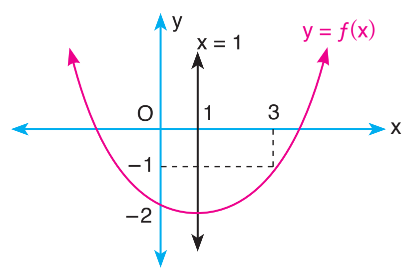
- Fonksiyonun grafiği y eksenini $C(0,6)$ noktasında kesmektedir. x eksenini kestiği noktalardan biri $(1,0)$ dır. Diğer noktayı bulalım.

$y = 0$ için $2x^2 - 8x + 6 = 0 \Rightarrow (2x-6) \cdot (x-1) = 0$ olur. Buradan $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ olur. O hâlde grafiğin x eksenini kestiği diğer nokta $(3,0)$ dır. Bu bilgiler kullanılarak çizilen grafik yandaki gibidir.



Örnek

Yanda grafiği verilen f fonksiyonunun simetri ekseni $x = 1$ doğrusu olduğuna göre fonksiyonun kuralını bulalım.



Çözüm

$x = 1$ doğrusu simetri ekseni olduğundan $|AB| = |BC| = 2$ birimdir. O hâlde fonksiyonun grafiği $(3,-1)$ ve $(-1,-1)$ noktalarından geçer.

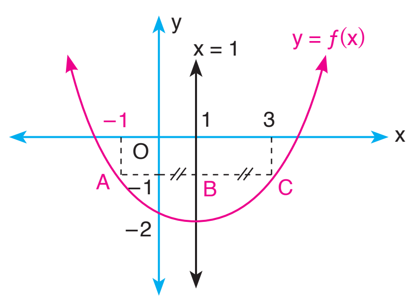
Aynı zamanda f fonksiyonunun grafiği y eksenini $(0,-2)$ noktasında kesmektedir.

f fonksiyonunun geçtiği üç nokta bilindiğinden $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ olsun.

y ekseni $(0,-2)$ noktasında kestiğinden

$x = 0$ için $y = f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -2$

$c = -2$ olur.



Buradan $y = f(x) = ax^2 + bx - 2$'dir.

Şimdi fonksiyonun geçtiği diğer noktaları kullanarak a ve b katsayılarını bulalım.

$y = f(x) = ax^2 + bx - 2$ fonksiyonunun grafiği $(3,-1)$ noktasından geçtiğinden

$x = 3$ için $y = f(3) = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 - 2 = -1 \Rightarrow 9a + 3b = 1$... (I)

$(-1,-1)$ noktasından geçtiğinden $x = -1$ için

$y = f(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) - 2 = -1 \Rightarrow a - b = 1$... (II)

(I) ve (II) denklemlerini birlikte çözelim.

$$9a + 3b = 1$$
$$-\ \ 3\,/\ a - b = 1$$
$$\overline{}$$
$$9a + \cancel{3b} = 1$$
$$+\ \ 3a - \cancel{3b} = 3$$
$$\overline{}$$
$$12a = 4$$
$$a = \frac{1}{3} \text{ olur.}$$

Bu değeri denklemlerden birinde yerine yazalım. $a - b = 1$ denkleminde yazarsak

$$a - b = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} - b = 1$$
$$-b = 1 - \frac{1}{3}$$
$$-b = \frac{2}{3}$$
$$b = -\frac{2}{3} \text{ tür. Buradan } f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 2 \text{ olur.}$$

Bir Doğru ile Bir Parabolün Birbirine Göre Durumları

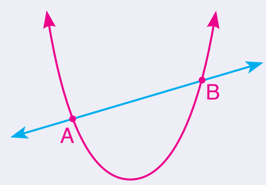
Bilgi

$y = ax^2 + bx + c$ parabolü ile $y = mx + n$ doğrusunun birbirine göre durumları, bu iki denklemin ortak çözümü ile bulunur. Ortak çözümü bulmak için y leri birbirine eşitlememiz gerekir.

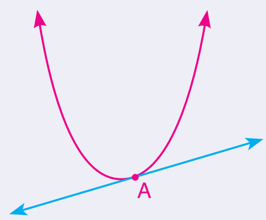
$$\left.\begin{array}{l} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + n \end{array}\right\} \quad ax^2 + bx + c = mx + n$$

$\Rightarrow ax^2 + (b - m)x + c - n = 0$ şeklinde ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem elde edilir. Bu denklemin diskirminantı

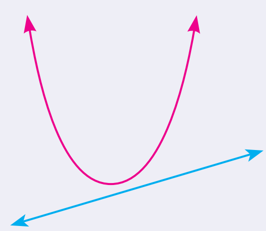
$\triangle = b^2 - 4ac$ olmak üzere



1) $\triangle > 0$ ise parabol ile doğru iki farklı noktada kesişir. Kesişim noktasının apsisleri denklemin kökleri x_1 ve x_2 dir.



2) $\triangle = 0$ ise parabol ile doğrunun ortak bir noktası vardır. Bu durumda parabol ile doğru birbirine teğettir. Teğet değme noktasının apsisi, denklemin $x_1 = x_2$ çakışık köküdür.



3) $\triangle < 0$ parabol ile doğru kesişmez.

Örnek

$y = x^2 + 4x - 9$ parabolü ile $y = 5x - 3$ doğrusunun birbirine göre durumlarını inceleyelim.

Çözüm

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 + 4x - 9 \\ y &= 5x - 3 \end{aligned}\right\} \; x^2 + 4x - 9 = 5x - 3 \Rightarrow x^2 + 4x - 9 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \text{ olur.}$$

$\triangle = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$

$\triangle > 0$ olduğundan parabol ile doğru farklı iki noktada kesişir.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2 \cdot a} = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2 \cdot a} = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1-5}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

Bu bulduğumuz x_1 ve x_2 değerleri parabol ve doğru denklemlerini sağlar. $y = 5x - 3$ denkleminde

$x_1 = 3$ için $y_1 = 5 \cdot 3 - 3 = 15 - 3 = 12$ ve $x_2 = -2$ için $y_2 = 5 \cdot (-2) - 3 = -10 - 3 = -13$ olur.

Buradan parabol ile doğrunun kesim noktaları $(3, 12)$ ve $(-2, -13)$ bulunur.

Örnek

$y = x^2 - x + 1$ parabolü ile $y = 3x + 2$ doğrusunun kesiştiği noktalar $M(x_1, y_1)$ ve $N(x_2, y_2)$ dir. Buna göre $x_1 + x_2$ ve $x_1 \cdot x_2$ değerlerini bulalım.

Çözüm

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 - x + 1 \\ y &= 3x + 2 \end{aligned}\right\} \; x^2 - x + 1 = 3x + 2 \Rightarrow x^2 - x + 1 - 3x - 2 = 0$$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0$ denklemi elde edilir.

I. Yol

$\triangle = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 16 + 4 = 20 > 0$ olduğundan parabol ile doğru farklı iki noktada kesişir.

$$x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{20}}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5}$$

$$x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{20}}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5}$$

$x_1 + x_2 = 2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} = 4$

$x_1 \cdot x_2 = (2 + \sqrt{5}) \cdot (2 - \sqrt{5}) = 2^2 - (\sqrt{5})^2 = 4 - 5 = -1$ bulunur.

II. Yol

$x^2 - 4x - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olacağından

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} - \frac{(-4)}{1} = 4$ ve $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$ bulunur.

Örnek

$y = x^2 + 2x + 4$ parabolü ile $y = px + p$ doğrusu birbirine teğet olduğuna göre p nin alabileceği değerler çarpımını bulalım.

Çözüm

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 + 2x + 4 \\ y = px + p \end{array}\right\} \; x^2 + 2x + 4 = px + p \Rightarrow x^2 + 2x + 4 - px - p = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + (2-p)x + (4-p) = 0 \text{ olur.}$$

Parabol ile doğrunun teğet olması için $\triangle = 0$ olmalıdır.

$$\triangle = b^2 - 4ac = (2-p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4-p) = 0 \Rightarrow 4 - 4p + p^2 - 16 + 4p = 0$$

$$\Rightarrow p^2 - 12 = 0 \Rightarrow p^2 = 12 \Rightarrow p = \mp 2\sqrt{3} \text{ olur. Buradan}$$

$p_1 \cdot p_2 = (-2\sqrt{3}) \cdot (2\sqrt{3}) = -2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = -12$ bulunur ya da

$p_1 \cdot p_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-12}{1} = -12$ bulunur.

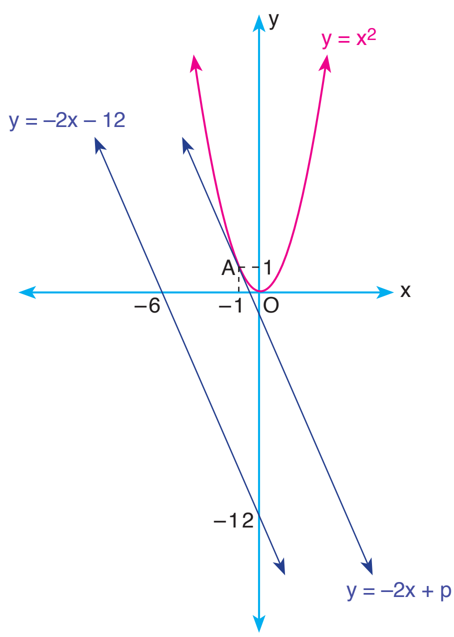
Örnek

$y = x^2$ parabolünün $y = -2x - 12$ doğrusuna en yakın noktasını bulalım.

Çözüm

$y = -2x - 12$ doğrusuna paralel ve $y = x^2$ parabolüne A noktasında teğet olacak şekilde $y = -2x + p$ doğrusunu çizelim.

$y = x^2$ parabolü ile $y = -2x + p$ doğrusu teğet olduğundan ortak çözüm denkleminde $\triangle = 0$ olmalıdır.



$$x^2 = -2x + p$$
$x^2 + 2x - p = 0$ olur. O hâlde
$$\triangle = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-p) = 0$$
$$4 + 4p = 0$$
$$p = -1\text{'dir.}$$

$p = -1$ için $x^2 + 2x + 1 = 0$
$$(x+1)^2 = 0$$
$$x_1 = x_2 = -1 \text{ olur.}$$

$x = -1$ için $y = x^2 \Rightarrow y = (-1)^2 \Rightarrow y = 1$'dir.

Parabolün doğruya en yakın noktası $A(-1, 1)$ bulunur.

Örnek

$y = x^2 - x - 2$ parabolü ile $y = mx - 2$ doğrusunun kesim noktaları A ve B'dir.

$[AB]$ nın orta noktasının apsisi 3 olduğuna göre m'nin değerini bulalım.

Çözüm

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - x - 2 \\ y = mx - 2 \end{array}\right\} \; x^2 - x - 2 = mx - 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 - mx + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - (1 + m)x = 0$$

Parabol ile doğrunun kesim noktaları $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ olmak üzere $[AB]$ nın orta noktası

$C\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$'dir.

$[AB]$ nın orta noktasının apsisi 3 olduğuna göre

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 3 \Rightarrow x_1 + x_2 = 6$$

$$\Rightarrow -\frac{b}{a} = 6 \Rightarrow \frac{1 + m}{1} = 6 \Rightarrow m = 6 - 1 \Rightarrow m = 5 \text{ bulunur.}$$

3.2.2. İkinci Dereceden Fonksiyonlarla Modellenebilen Problemler

Bu bölümde bazı problem örneklerini ikinci derece fonksiyonlarla modelleyerek çözeceğiz.

Bilgi

Problem, matematikte içinde bulunulan şartları ve eldeki mevcut verileri kullanarak bir olguya, sonuca ya da yasaya ulaşmak için sorgulanması gereken durumları tanımlamakta kullanılır.

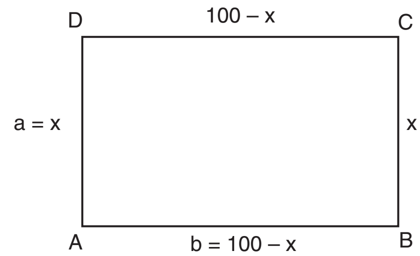
Matematiksel modelleme, gerçek hayat problemlerinin matematiksel terimlerle çözümünü bulmayı sağlayan bir yöntemdir.

Örnek

Mehmet Bey'in dikdörtgen biçiminde bir arsası vardır. Arsanın çevresi 200 m'dir. Buna göre bu arsanın alanının en fazla kaç metrekare olacağını bulalım.

Çözüm

Şimdi bu problemi ikinci dereceden fonksiyon olarak modelleyerek çözelim.



Arsanın çevresi 200 m olduğundan

$\text{Çevre(ABCD)} = 2(a+b) \Rightarrow 200 = 2(a+b)$

$$a+b = 100 \text{ olur.}$$

Dikdörtgenin kısa kenarı x ise uzun kenarı 100 – x olur. Arsanın alanı $x \cdot (100-x)$ olur.

Alanı, $y = f(x)$ fonksiyonu olarak alalım.

Buradan $y = f(x) = x \cdot (100-x) \Rightarrow y = 100x - x^2$ ikinci dereceden fonksiyonu elde edilir.

$y = 100x - x^2$ fonksiyonunda, $a = -1 < 0$ olduğundan fonksiyonun alabileceği en büyük değer tepe noktasının ordinatıdır.

$T(r,k)$ olmak üzere $y = 100x - x^2$ fonksiyonu için

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{2\cdot(-1)} = -\frac{100}{-2} = 50 \text{ olur.}$$

$$k = f(r) \Rightarrow k = f(50) = 100 \cdot 50 - 50^2$$

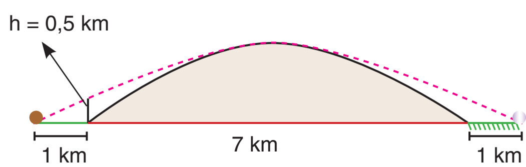
$$= 5000 - 2500$$

$$= 2500 \text{ m}^2 \text{ bulunur.}$$

Örnek

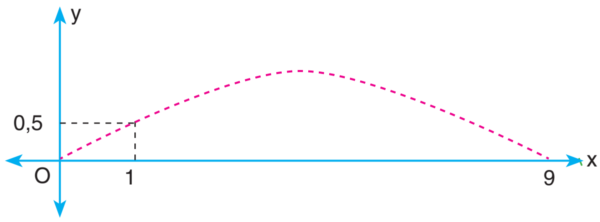
Şekildeki gibi bir tepenin 1 km gerisinden bir top mermisi ateşleniyor. Top mermisi, tepenin zirvesine teğet geçerek zirvenin diğer taraftaki eteğinin 1 km ötesine düşüyor.

Ateşlenmenin yapıldığı tarafta, top mermisi tepenin eteğinin hizasına geldiğinde merminin, yerden 0,5 km yükseklikte olduğu biliniyor. Buna göre tepenin zirvesinin yerden yüksekliğini bulalım (Tepenin etekleri arasındaki uzaklık 7 km'dir.).



Çözüm

Bu problemi analitik düzlemde modelleyelim. Top mermisinin ateşlendiği yeri orijin olarak kabul edersek bu top mermisinin izlediği yolu gösteren grafik yandaki gibi olur.



Bu grafik $[0,9]$ aralığında bir parabol grafiğidir. Grafik, x eksenini $x=0$ ve $x=9$ apsisli noktalarda keser.

Buradan, parabolün denklemi $y=a(x-x_1)\cdot(x-x_2) \Rightarrow y=a\cdot x\cdot(x-9)$ biçiminde bulunur. Ayrıca $x=1$ için $y=f(1)=a\cdot 1\cdot(1-9)=0,5$ olduğundan $-8a=\frac{1}{2}$, $a=-\frac{1}{16}$'dır. Buradan $y=-\frac{1}{16}x(x-9) \Rightarrow y=-\frac{x^2}{16}+\frac{9x}{16}$ denklemi elde edilir.

Top mermisi tepenin zirvesine teğet geçtiğinden elde edilen parabol denkleminin aldığı en büyük değer olan tepe noktasının ordinatı, bize dağın zirvesinin yerden yüksekliğini verir.

$y=-\frac{x^2}{16}+\frac{9x}{16}$ parabolünün tepe noktası $T(r,k)$ olmak üzere

$$r=-\frac{b}{2a}=-\frac{\frac{9}{16}}{2\cdot\left(-\frac{1}{16}\right)}=\frac{-\frac{9}{16}}{-\frac{2}{16}}=\frac{9}{\cancel{16}}\cdot\frac{\cancel{16}}{2}=\frac{9}{2}$$

$$k=f(r) \Rightarrow k=f\left(\frac{9}{2}\right)=-\frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2}{16}+\frac{9\cdot\frac{9}{2}}{16}=-\underset{(1)}{\frac{81}{64}}+\underset{(2)}{\frac{81}{32}}=-\frac{81}{64}+\frac{162}{64}=\frac{81}{64} \text{ bulunur.}$$

O hâlde dağın zirvesinin yerden yüksekliği $\frac{81}{64}$ km olur.

Örnek

İki sayının toplamı 27'dir. Bu sayıların çarpımının en çok kaç olacağını bulalım.

Çözüm

Sayıların toplamı 27 ise bu sayılardan birini x, diğerini 27 – x olarak alabiliriz.

Sayıların çarpımını $y=f(x)$ fonksiyonu ile gösterirsek

$y=f(x)=x\cdot(27-x) \Rightarrow y=f(x)=27x-x^2$ fonksiyonunu elde ederiz.

Bu bir ikinci derece fonksiyondur ve en büyük değerini tepe noktasında alır.

Tepe noktası $T(r,k)$ ise $r=-\frac{b}{2a}=-\frac{27}{2\cdot(-1)}=\frac{27}{2}$'dir.

$$k=f(r) \Rightarrow k=f\left(\frac{27}{2}\right)=27\cdot\frac{27}{2}-\left(\frac{27}{2}\right)^2=\underset{(2)}{\frac{729}{2}}-\underset{(1)}{\frac{729}{4}}=\frac{729}{4}=182,25 \text{ olur.}$$

Alıştırmalar 3-2

1. $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (4 - m)x^3 + (m - 2)x^2 + 2x + 4$ fonksiyonu 2. dereceden bir değişkenli fonksiyon olduğuna göre $f(x)$ fonksiyonun denklemini bulunuz.

2. Aşağıdaki ikinci dereceden fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $y = \frac{1}{4}x^2$ **b)** $y = -3x^2$ **c)** $y = 2x^2 - 3$ **ç)** $y = -\frac{1}{4}(x + 4)^2$

d) $y = 3(x + 1)^2 + 2$ **e)** $y = 2x^2 + 8x + 3$

3. $y = x^2 - (m - 2)x + m + 3$ parabolünün tepe noktası $T(2, k)$ olduğuna göre k kaçtır?

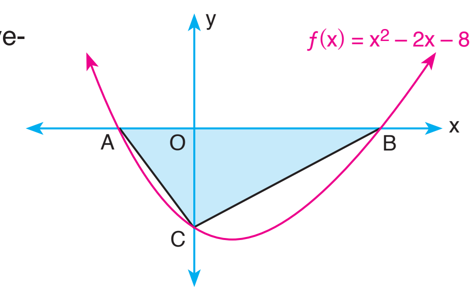
A) 9 B) 8 C) 7 D) 5 E) 6

4. $f(x) = -x^2 + (m - 1)x + 7$ parabolünün simetri ekseni $x = 1$ doğrusu olduğuna göre parabolün alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

5. Yandaki şekilde $f(x) = x^2 - 2x - 8$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Verilenlere göre $\widehat{ABC}$ nin alanı kaç birimkaredir?

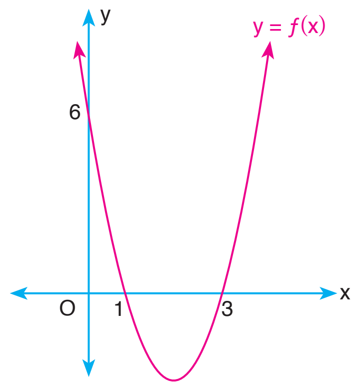


A) 16 B) 20 C) 24 D) 28 E) 32

6. $y = -x^2 - 4x - m$ parabolünün tepe noktası x ekseni üzerinde olduğuna göre m değeri kaçtır?

A) –1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

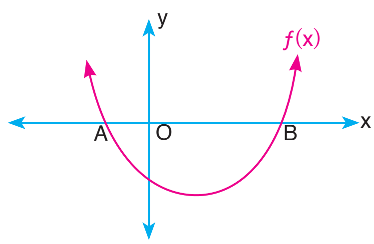
7. Yanda grafiği verilen ikinci dereceden f fonksiyonunun kuralını bulunuz.



8. $A(1,0)$, $B(2,-5)$ ve $C(0,7)$ noktalarından geçen parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = x^2 - 8x + 7$
B) $y = x^2 + 8x - 7$
C) $y = -x^2 + 8x + 7$
D) $y = -x^2 - 8x - 7$
E) $y = x^2 - 8x - 7$

9. Yanda $f(x) = x^2 - 4x + 3k + 1$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $|OB| = 5|OA|$ olduğuna göre k değerini bulunuz.

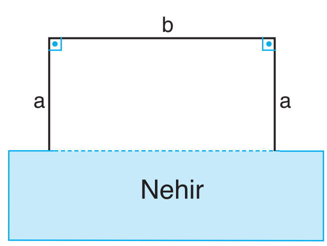


10. $y = x^2 + 3x - 5$ parabolü ile $y = -x + 1$ doğrusunun kesim noktalarını birleştiren doğru parçasının orta noktasının koordinatlarını bulunuz.

11. $y = x^2 + x + 4$ parabolü ile $y = 2x + p$ doğrusunun farklı iki noktada kesişebilmesi için p nin en geniş çözüm aralığını bulunuz.

12. Yerden belli bir açıyla fırlatılan bir roket, 4. saniyede yerden 384 m yükseğe çıkmıştır. Roket, en yükseğe 50. saniyede ulaşmıştır ve bu yükseklik 2500 m'dir. Bu roketin zamana bağlı yerden yüksekliğini veren fonksiyon kuralını bulunuz.

13. Bir çiftçi, nehir kenarında dikdörtgen şeklinde üç tarafının uzunluğu 500 m olan bir arazinin üç tarafını tel örgüyle çevreleyecektir. Arazinin en büyük alanlı olması için b uzunluğu kaç m olmalıdır?



3.3. FONKSİYONLARIN DÖNÜŞÜMLERİ



1. görsel



2. görsel

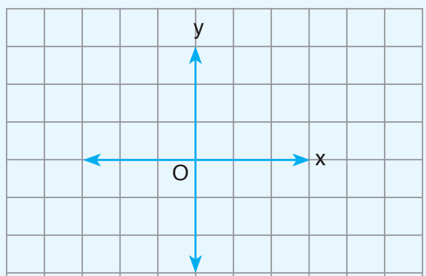
Verilen 1. görseldeki araç bir doğru boyunca hareket ettiğinde öteleme hareketi yapar. 2. görselde de dağın suda yansıması (su yüzeyine göre simetriği) görülmektedir.

Fonksiyon grafiklerinde ötelemenin ve bir eksene göre yansımanın nasıl olabileceğini açıklayınız.

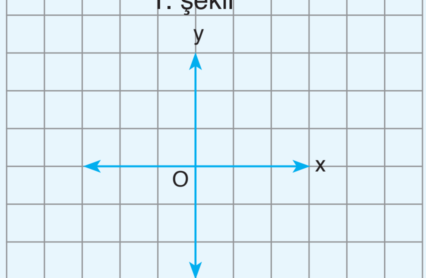
3.3.1. Fonksiyon Grafiklerine Dönüşüm Uygulama

Etkinlik

- $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x$ fonksiyonunun grafiğini yandaki analitik düzlemde çiziniz.
- Aynı analitik düzlemde (1. şekil) $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = x + 2$ ve $f_3(x) = x + 3$ fonksiyon grafiklerini çiziniz.
- Fonksiyon grafiklerini yorumlayınız.
- Aynı analitik düzlemde (2. şekil) $f_4(x) = x - 1$, $f_5(x) = x - 2$ ve $f_6(x) = x - 3$ fonksiyon grafiklerini çiziniz.
- Fonksiyon grafiklerini yorumlayınız.



1. şekil



2. şekil

Örnek

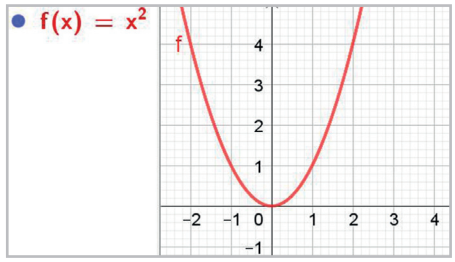
$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ fonksiyonun grafiğini çizelim Buna göre

a) $y = k \cdot f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin k nin değişen değerlerine göre nasıl değiştiğini inceleyelim.

b) $y = f(k \cdot x)$ fonksiyon grafiğinin k nin değişen değerlerine göre nasıl değiştiğini inceleyelim.

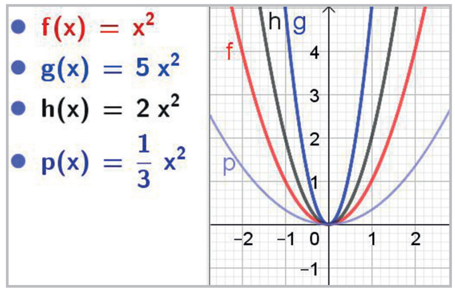
Çözüm

a) Bir dinamik matematik yazılımını çalıştıralım. Giriş bölümüne $f(x)=x^2$ yazıp Enter tuşuna bastığımızda $f(x)=x^2$ fonksiyonunun grafiğini çizmiş oluruz.



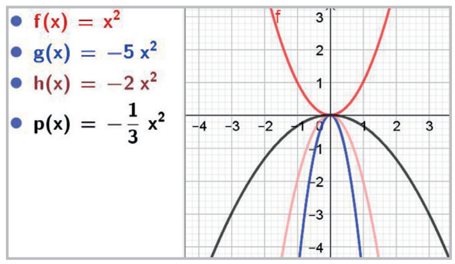
$k=5, k=2$ ve $k=\frac{1}{3}$ değerleri için $5f(x), 2f(x)$ ve $\frac{1}{3}f(x)$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.

Giriş bölümüne sırasıyla $5f, 2f$ ve $(1/3)f$ yazıp Enter tuşuna bastığımızda yandaki grafikleri çizmiş oluruz.



$k=-5, k=-2$ ve $k=-\frac{1}{3}$ değerleri için $-5f(x), -2f(x)$ ve $-\frac{1}{3}f(x)$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.

Giriş bölümüne sırasıyla $-5f, -2f$ ve $(-1/3)f$ yazıp Enter tuşuna bastığımızda yandaki grafikleri çizmiş oluruz.

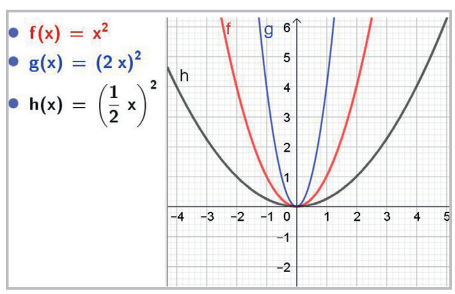


Bilgi

Yukarıdaki grafiklerde göraldüğü gibi $k \cdot f(x)$ parabolünde k değeri mutlak değer olarak büyüdükçe $f(x)$ parabolünün kolları arasındaki açıklık azalmaktadır. k değeri mutlak değer olarak küçüldükçe parabolün kolları arasındaki açıklık artmaktadır.

b) $k=2$ ve $k=\frac{1}{2}$ değerleri için $f(2x), f\left(\frac{1}{2}x\right)$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.

Giriş bölümüne sırasıyla $f(2x)$ve $f\left(\frac{1}{2}x\right)$ yazıp Enter tuşuna bastığımızda yandaki grafikleri çizmiş oluruz.



$f(2x)$ fonksiyonunn grafiğinin kolları arasındaki açıklık $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin kolları arasındaki açıklığın $\frac{1}{2}$ katıdır.

$f\left(\frac{1}{2}x\right)$ fonksiyonunun grafiğiin kolları arasındaki açıklık $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin kolları arasındaki açıklığın 2 katıdır.

Bilgi

$f(x)$ bir parabol olmak üzere $f(k \cdot x)$ parabolünün kolları arasındaki açıklık $f(x)$ parabolünün kolları arasındaki açıklığın $\frac{1}{k}$ katıdır.

Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 4$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çizelim. Bu grafikleri $f(x) = x^2$ nin grafiğiyle karşılaştıralım.

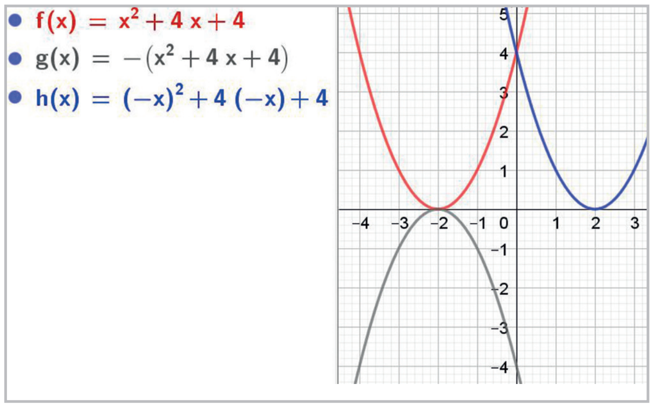
a) $-f(x)$ ve $f(-x)$ **b)** $f(x)+1$ **c)** $f(x-3)$

Çözüm

a) $f(x) = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow g(x) = -f(x) = -(x^2 + 4x + 4)$ ve $h(x) = f(-x) = (-x^2) + 4(-x) + 4$ olur.

Dinamik matematik yazılımını kullanarak bu fonksiyonlarının grafikleri yandaki gibi çizilir.

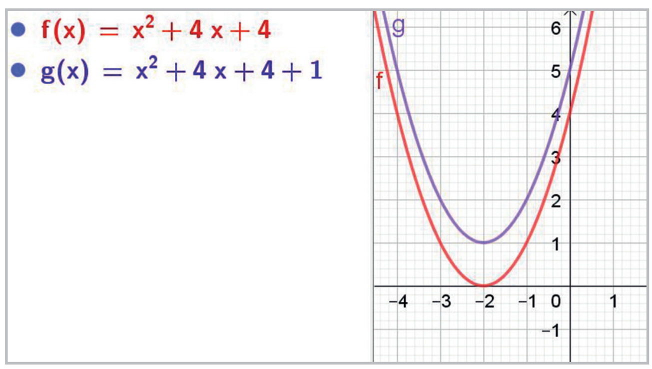
Görüldüğü gibi $f(x)$ ve $-f(x)$ fonksiyonlarının grafikleri x eksenine göre simetriktir. $f(x)$ ve $f(-x)$ fonksiyonlarının grafikleri y eksenine göre simetriktir.



b) $f(x) = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow g(x) = f(x) + 1 = x^2 + 4x + 4 + 1 = x^2 + 4x + 5$'tir.

Dinamik matematik yazılımında $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri yandaki gibidir.

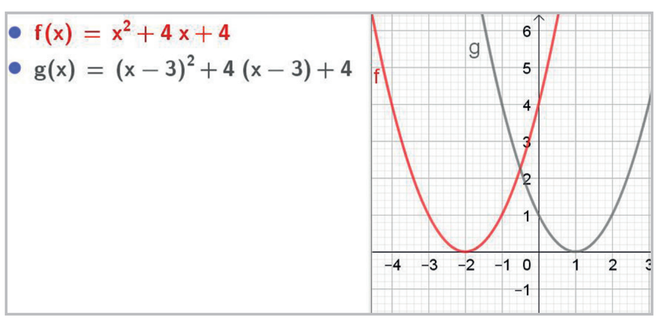
Görüldüğü gibi $f(x)+1$ in grafiği, $f(x)$ in grafiğinin y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim ötelenmiş hâlidir.



c) $y = f(x) = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow g(x) = f(x-3) = (x-3)^2 + 4(x-3) + 4$'dtür.

Dinamik matematik yazılımında bu fonksiyonlarının grafikleri yandaki gibi çizilir.

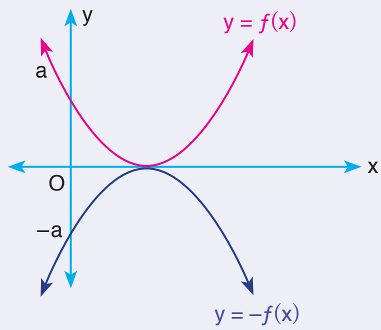
Görüldüğü gibi $f(x-3)$ ün grafiği, $f(x)$ in grafiğinin x ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim ötelenmiş hâlidir.



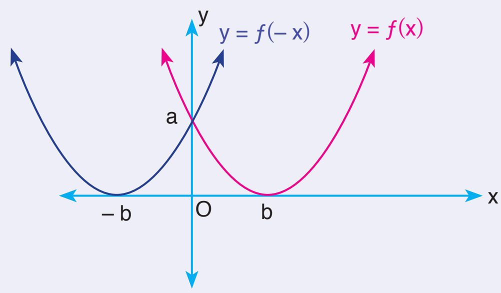
Bilgi

$y = f(x)$ in grafiği verildiğinde

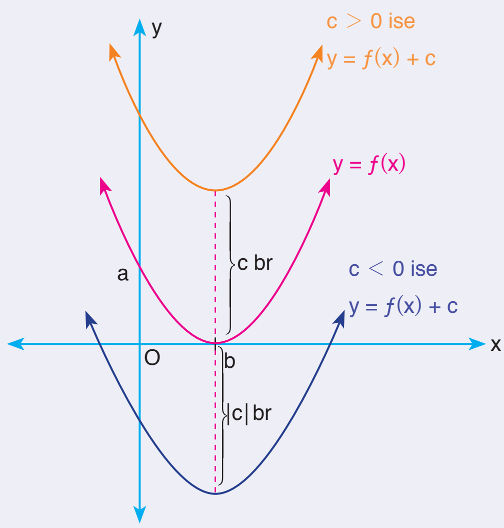
1. $y = -f(x)$ in grafiği ile $y = f(x)$ in grafiği x eksenine göre simetriktir.



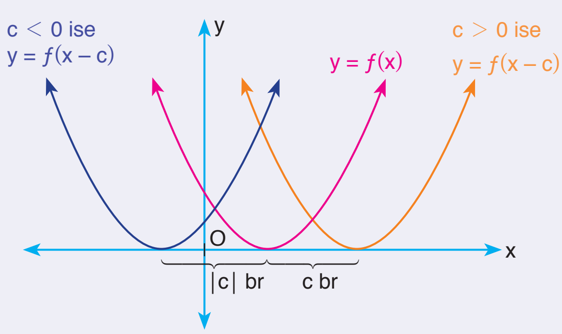
2. $y = f(-x)$ in grafiği ile $y = f(x)$ in grafiği y eksenine göre simetriktir.



3. $y = f(x) + c$ nin grafiği, $c > 0$ ise $y = f(x)$ in grafiğinin y ekseni boyunca c birim pozitif yönde; $c < 0$ ise $y = f(x)$ in grafiğinin y ekseni boyunca $|c|$ birim negatif yönde ötelenmişidir.



4. $y = f(x - c)$ nin grafiği, $c > 0$ ise $y = f(x)$ in grafiğinin x ekseni boyunca pozitif yönde; c birim $c < 0$ ise x ekseni boyunca negatif yönde $|c|$ birim ötelenmişidir.



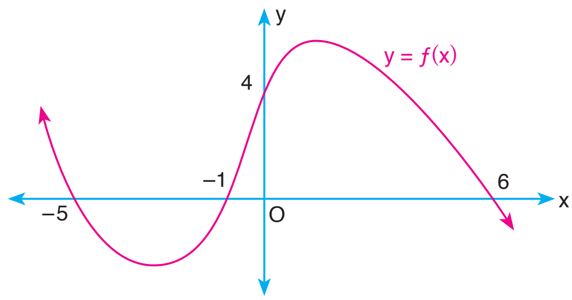
Örnek

Yanda $y = f(x)$ in grafiği verilmiştir. Buna göre

a) $y = -f(x)$ **b)** $y = f(-x)$

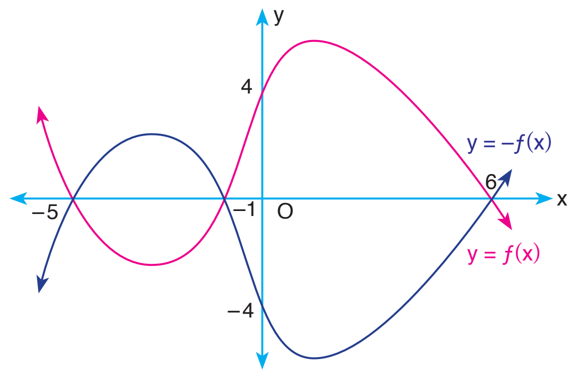
c) $y = f(x+1)$ **ç)** $y = f(x) - 2$

fonksiyonlarının grafiklerini $y = f(x)$ in grafiğiyle aynı analitik düzlemde çizelim.

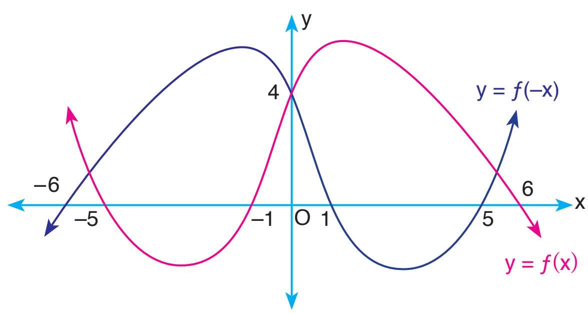


Çözüm

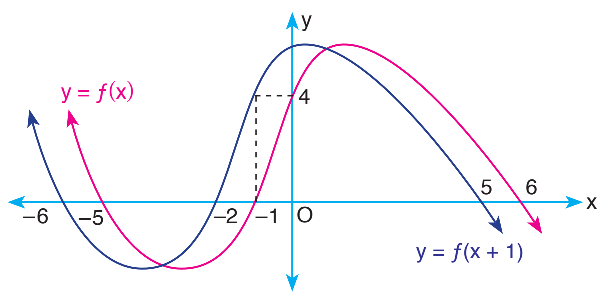
a) $y = f(x)$ in grafiği verildiğinde $y = -f(x)$ grafiği, $y = f(x)$ in grafiğinin x eksenine göre simetriğidir. O hâlde bu iki fonksiyonun aynı analitik düzlemde grafikleri yandaki gibidir.



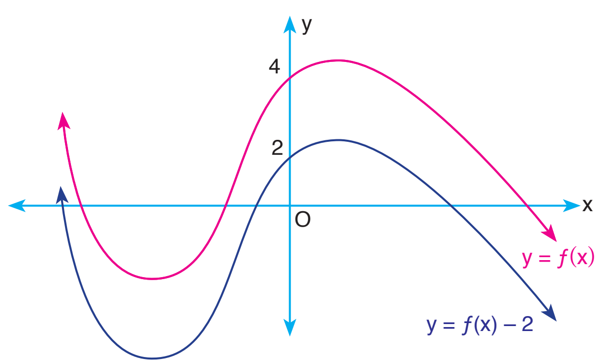
b) $y = f(x)$ in grafiği verildiğinde $y = f(-x)$ grafiği, $y = f(x)$ in grafiğinin y eksenine göre simetriğidir. O hâlde $y = f(x)$ ile $y = f(-x)$ in aynı analitik düzlemdeki grafikleri yandaki gibidir.



c) $y = f(x)$ in grafiği verildiğinde $y = f(x+1)$ in grafiğini bulurken $f(x)$ in grafiğini x ekseni boyunca negatif yönde 1 birim öteleriz. O hâlde bu iki fonksiyonun aynı analitik düzlemdeki grafikleri yandaki gibi olacaktır.



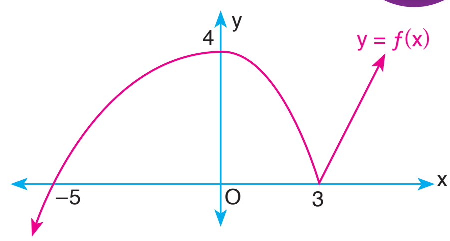
ç) $y = f(x)$ in grafiği verildiğinde $y = f(x) - 2$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ in grafiğinin y ekseni boyunca negatif yönde ötelenmesiyle elde edilir. O hâlde bu iki fonksiyonun aynı analitik düzlemdeki grafikleri yandaki gibidir.



Örnek

Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$y = f(-x) + 2$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

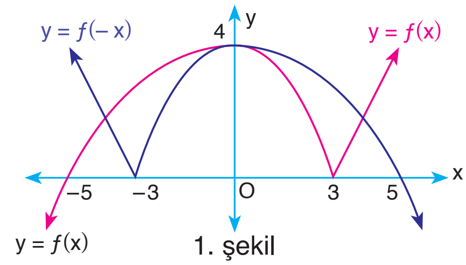


Çözüm

Burada $y = f(x)$ in grafiğinden faydalanacağız.

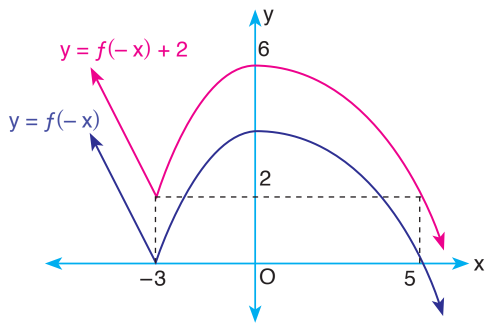
$y = f(-x) + 2$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine hem simetri hem öteleme uygularız.

$y = f(-x)$ in grafiği, $y = f(x)$ in grafiğinin y eksenine göre simetriği olduğundan önce $y = f(x)$ in y eksenine göre simetriğini alırsak 1. şekildeki grafiği elde ederiz.



1. şekil

Burada elde ettiğimiz $y = f(-x)$ fonksiyonunun grafiğini y ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim ötelersek $y = f(-x) + 2$ fonksiyonunun grafiğini elde ederiz. Bu grafik de 2. şekildeki gibidir.



2. şekil

Tek ve Çift Fonksiyonların Grafiklerinin Özellikleri

Hatırlatma

$f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f fonksiyonu verilsin. Her $x \in A$ için $f(-x) = f(x)$ ise f fonksiyonuna **çift fonksiyon** ve $f(-x) = -f(x)$ ise f fonksiyonuna **tek fonksiyon** denir.

Örnek

Aşağıdaki fonksiyonların tek veya çift fonksiyon olma durumlarını inceleyelim.

a) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 1$ **b)** $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 - x$

Çözüm

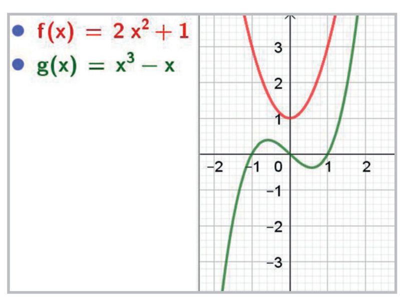
a) $\left.\begin{array}{l} f(-x) = 2 \cdot (-x)^2 + 1 = 2x^2 + 1 \\ f(x) = 2x^2 + 1 \end{array}\right\}$ $f(-x) = f(x)$ olduğundan f fonksiyonu çift fonksiyondur.

b) $g(x) = x^3 - x$

$g(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x$

$= -(x^3 - x) = -g(x)$ olduğundan f fonksiyonu tek fonksiyondur.

Yukardaki grafiklerde görüldüğü gibi çift fonksiyonun grafiği y eksenine göre, tek fonksiyonun grafiği orijine göre simetriktir.



Özellik

$f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir f fonksiyonu verilsin.

1. f çift fonksiyon ise her $x \in A$ için $f(x) = f(-x)$ olduğundan $(x, y) \in f$ iken $(-x, y) \in f$ tir yani çift fonksiyonun grafiği y eksenine göre simetriktir.

2. f tek fonksiyon ise her $x \in A$ için $f(-x) = -f(x)$ olduğundan $(x, y) \in f$ iken $(-x, -y) \in f$ tir yani tek fonksiyonun grafiği orijine göre simetriktir.

Örnek

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4$ veriliyor. f fonksiyonunun grafiğini çizerek f nin tek veya çift fonksiyon olma durumunu inceleyelim.

Çözüm

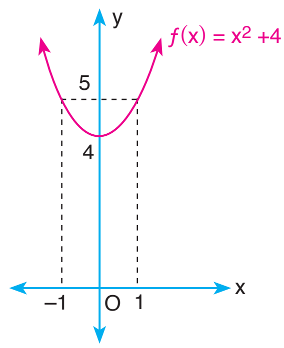
$y = f(x) = x^2 + 4$

$x = -1$ için $y = (-1)^2 + 4 = 5$

$x = 0$ için $y = 0^2 + 4 = 4$

$x = 1$ için $y = 1^2 + 4 = 5$ olur. Değişim tablosu aşağıdaki gibidir.

x	–1	0	1
y	5	4	5



Bu noktaları analitik düzlemde işaretleyerek yandaki grafiği elde ederiz. $f(x) = x^2 + 4$ fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetrik olduğundan f çift fonksiyondur.

Örnek

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (a-3)x^5 + (b-2)x^3 + (a+b)x^2 + a + b - 6$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetriktir. Buna göre f fonksiyonunun kuralını bulalım.

Çözüm

f fonksiyonunun grafiği y eksenine simetrik olduğundan çift foksiyondur.

Çift fonksiyon kuralında x in dereceleri çift sayı olmalıdır. Tek dereceli x li terim olmamalıdır. Buradan $a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$ ve $b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2$ olur.

$f(x) = (3-3)x^5 + (2-2)x^3 + (3+2)x^2 + 3 + 2 - 6$

$f(x) = 5x^2 - 1$ bulunur.

Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x)=x^3$ fonksiyonu veriliyor. f fonksiyonun grafiğini çizerek f fonksiyonun tek veya çift fonksiyon olma durumunu inceleyelim.

Çözüm

$x=-2$ için $f(-2)=(-2)^3=-8$

$x=-1$ için $f(-1)=(-1)^3=-1$

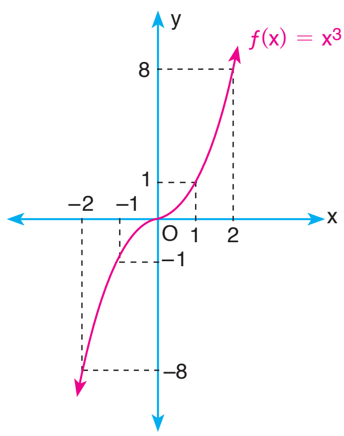
$x=0$ için $f(0)=0^3=0$

$x=1$ için $f(1)=1^3=1$

$x=2$ için $f(2)=2^3=8$ olur.

Fonksiyonun değişim tablosu aşağıdaki gibidir.

x	−2	−1	0	1	2
y	−8	−1	0	1	8



Bu değerleri analitik düzlemde işaretleyip grafiği oluşturalım.

$y=f(x)=x^3$ grafiği orijine göre simetrik olduğundan f fonksiyonu tek fonksiyondur.

Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x)=(a-2)x^4+x^3+(b-3)x^2+3x+a-b$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiği orijine göre simetriktir. Buna göre f fonksiyonunun kuralını bulalım.

Çözüm

f fonksiyonunun grafiği orijine göre simetrik olduğundan tek foksiyondur.

Tek fonksiyon kuralında x in dereceleri tek sayı olmalıdır, çift dereceli x li terim olmamalıdır.

Buradan $a-2=0 \Rightarrow a=2$ ve $b-3=0 \Rightarrow b=3$ olur.

$f(x)=(2-2)x^4+x^3+(3-3)x^2+3x+2-3 \Rightarrow f(x)=x^3+3x-1$ bulunur.

Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f$ fonksiyonunun grafiği orijine göre simetriktir.

$f(x)=2f(-x)+4x^3+6x$ olduğuna göre $f(2)$ değerini bulalım.

Çözüm

f fonksiyonunun grafiği orijine göre simetrik ise f tek fonksiyondur. $f(-x)=-f(x)$ tir. Buradan

$f(x)=2f(-x)+4x^3+6x \Rightarrow f(x)=-2f(x)+4x^3+6x \Rightarrow 3f(x)=4x^3+6x$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{4x^3+6x}{3}$ olur. $f(2)=\dfrac{4\cdot 2^3+6\cdot 2}{3}=\dfrac{4\cdot 8+12}{3}=\dfrac{32+12}{3}=\dfrac{44}{3}$ bulunur.

Alıştırmalar 3-3

1. Aşağıdaki cümlelerin başındaki boş kutucuğa ifade doğruysa "D", yanlış ise "Y" yazınız.

a) ☐ $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinden $y = f(-x)$ in grafiği elde edilirken $y = f(x)$ in grafiğine öteleme uygulanır.

b) ☐ $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinden $y = f(x) + 1$ in grafiği elde edilirken $y = f(x)$ in grafiğine öteleme uygulanır.

c) ☐ $y = f(x)$ fonksiyonu çift fonksiyon ise grafiği y eksenine göre simetriktir.

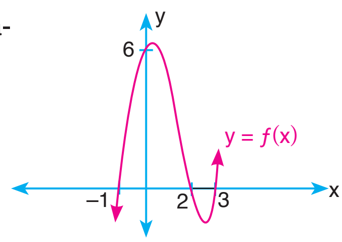
ç) ☐ $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği x eksenine göre simetrik ise $y = f(x)$ fonksiyonu tek fonksiyondur.

2. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiğini kullanarak aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

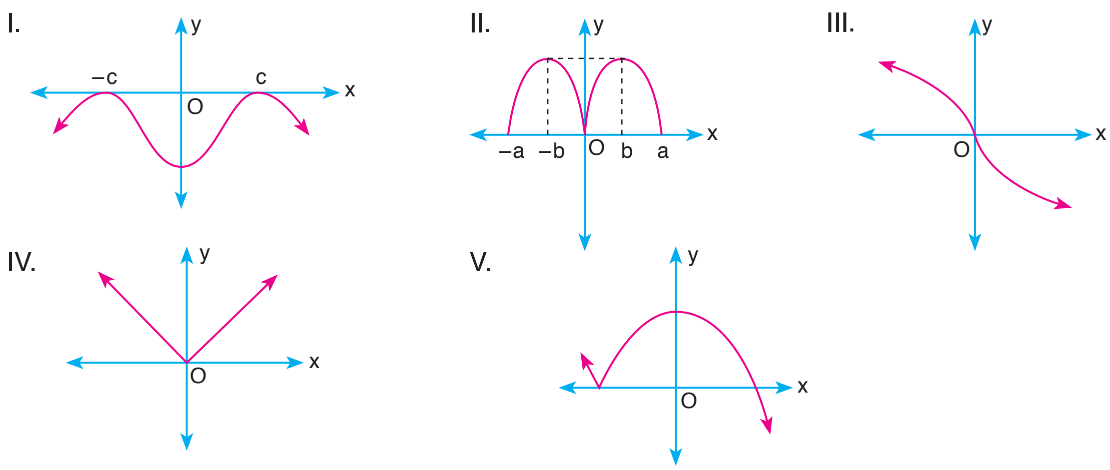
a) $y = f(-x)$ **b)** $y = -f(-x)$ **c)** $y = f(x-2)$ **ç)** $y = f(x) + 1$

3. Yanda grafiği verilen f fonksiyonunu kullanarak aşağıdaki fonksiyonların grafiğini çiziniz.

a) $y = f(-x)$ **b)** $y = -f(x)$ **c)** $y = -f(-x)$



4. Aşağıda grafiği verilen fonksiyonlardan kaç tanesi çift fonksiyondur?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5. Aşağıdaki kuralları verilen fonksiyonların çift veya tek fonksiyon olup olmadığını belirtiniz.

$f(x) = x^4 + 2x^2$ $g(x) = x^3 + 1$ $h(x) = x^3 + 3x$

3. DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Aşağıdaki noktalı yerlere uygun ifadeleri yazarak cümleleri tamamlayınız.

a) f fonksiyonunu .... ise grafiği orijine göre simetriktir.

b) $f(x) = x^{a-4} + 2x + 3$ fonksiyonu 2. dereceden ise $a =$ .... olur.

c) $f(x)$ fonksiyonun grafiği $(-2,4)$ ve $(6,12)$ noktalarından geçiyorsa $[-2,6]$ nda ortalama değişim hızı .... olur.

ç) Her $x \in (a,b)$ için $f(x) < 0$ ise $f(x)$ fonksiyonu (a,b) nda .... değer alır.

d) $y = f(x+1)$ fonksiyonun grafiği, $y =$ .... fonksiyonunun grafiğinin x ekseni boyunca pozitif yönde 2 br ötelenmiştir.

e) Bir ikinci derece fonksiyonu, ... noktasında en büyük veya en küçük değerini alır.

2. Aşağıdaki cümlelerin başındaki kutucuğa ifade doğruysa "D", yanlışsa "Y" yazınız.

a) ☐ $f(x) = 4x^2$ grafiği x eksenine göre simetriktir.

b) ☐ $f(x) = 2x^2 + 4x - 5$'in grafiğinin simetri ekseni $x = -1$ doğrusudur.

c) ☐ $f(x)$ fonksiyonun $[4,6]$ nda ortalama değişim hızı, $\dfrac{f(4) - f(6)}{4 - 6}$ dır.

ç) ☐ $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğinin tepe noktasının koordinatları $T\left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$ olur.

d) ☐ Bir parabol ile bir doğru kesişmiyorsa parabol ve doğrunun ortak çözümlerinin denkleminde $\Delta \geqslant 0$ olur.

e) ☐ $y = f(-x) + 3$'ün grafiğini elde etmek için $y = f(x)$ fonksiyonun grafiğine öteleme uygulaması yeterlidir.

3. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + x - 4$ olmak üzere f fonksiyonun $[0,4]$ nda ortalama değişim hızı kaçtır?

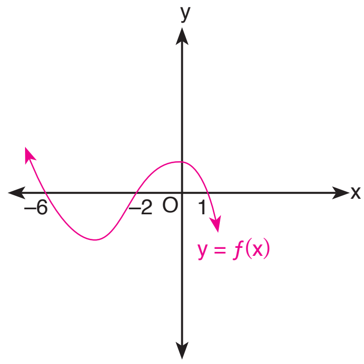
A) 2 B) 4 C) 6 D) 9 E) 10

4. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x + 8$ kuralı ile verilen fonksiyonun maksimum değeri kaçtır?

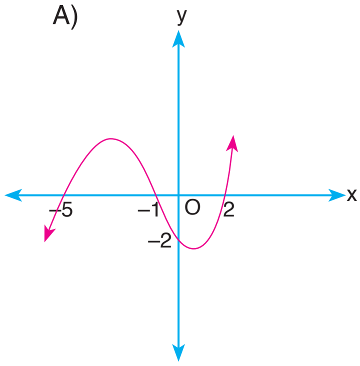
A) 14 B) 12 C) 10 D) 8 E) 6

5. Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

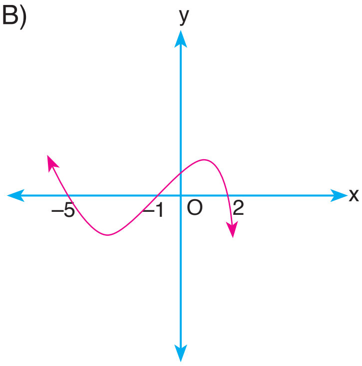
Buna göre $y = -f(x-1)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?



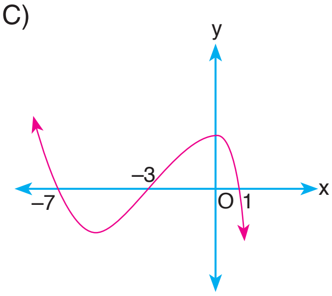
A)



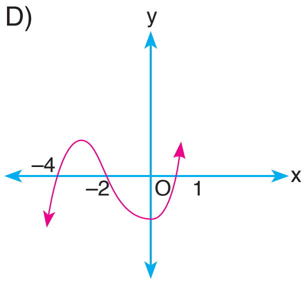
B)



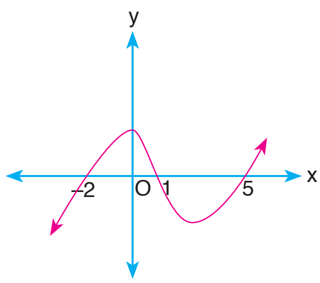
C)



D)

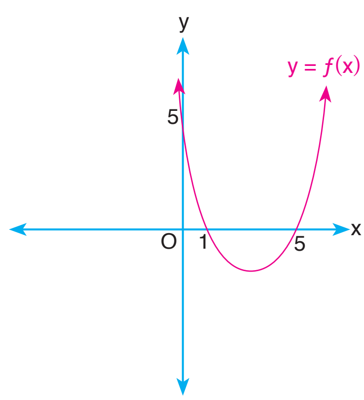


E)



6. Yanda $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $a + b - c$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?



A) -8 B) -9 C) -10 D) -11 E) -12

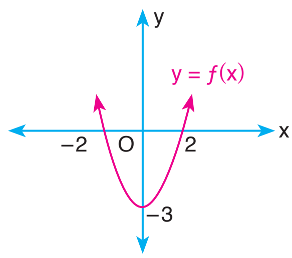
7. $y = 4x^2 - 4x + m$ parabolü ile $y = 4x - m$ doğrusu birbirine teğet olduğuna göre m değeri kaçtır?

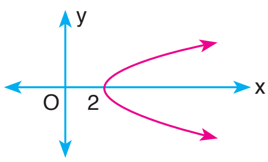
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

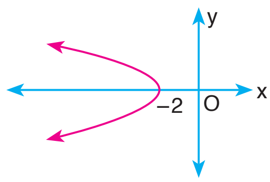
8. $y = x^2 + 4x + m$ parabolü ile $y = -4x + m$ doğrusu farklı iki noktada kesiştiğine göre bunların kesim noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?

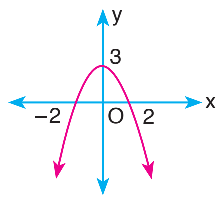
A) -10 B) -8 C) -6 D) 2 E) 4

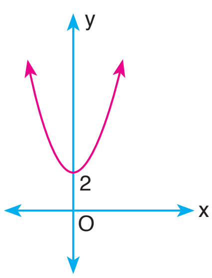
9. Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $y = f(x-2)+3$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?

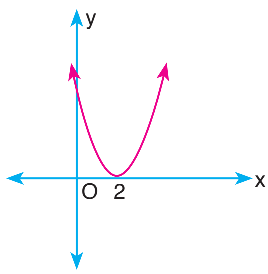


A)


B)


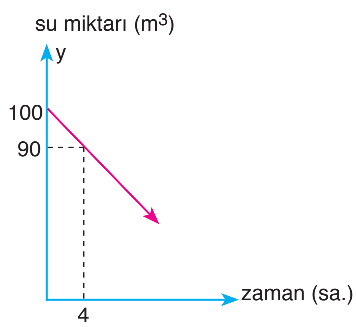
C)


D)


E)


10. Bir havuzda 100 m^3 su vardır. Havuzun dibindeki bir musluk açılıyor. Havuzdaki su miktarının zamana bağlı değişimini veren grafik yandaki gibidir.

Buna göre x. saatte havuzdaki su miktarını veren kural aşağıdakilerden hangisidir? (y = su miktarı, x = zaman)



A) $y = \dfrac{200-5x}{2}$

B) $y = \dfrac{400-5x}{2}$

C) $y = \dfrac{5x-200}{2}$

D) $y = \dfrac{5x+100}{2}$

E) $y = \dfrac{5x-400}{2}$

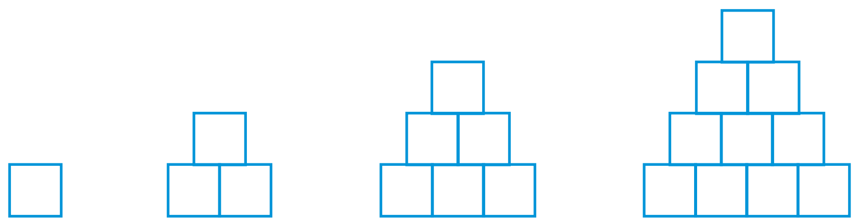
11. Aşağıdaki tabloda x ve y değerleri verilmiştir.

x	1	2	3	4	...
y	–1	1	3	5	...

Buna göre y ile x arasındaki ilişkiyi veren ifade aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = 2x + 3$ B) $y = x - 2$ C) $y = \frac{x+1}{2}$ D) $y = 2x - 3$ E) $y = 2x + 1$

12.



1. adım 2. adım 3. adım 4. adım

Yukarıda karelerle bir örüntü oluşturulmuştur. x adım sayısı ve $f(x)$ de her adımda kullanılan kare sayısı olmak üzere $f(14)$ değeri kaçtır?

A) 105 B) 100 C) 95 D) 90 E) 85

13. Tanımlı olduğu aralıkta $f(x)$ fonksiyonunun grafiği orijine göre simetriktir.

$f(x) - f(-x) = (m-6)x^4 + mx^3 + (m-2)x$ olduğuna göre $f(2)$ değeri kaçtır?

A) 22 B) 24 C) 26 D) 28 E) 30

14. Başlangıç sermayesi 50000 TL olan bir şirket, haftalık 6000 TL gelir ve 3600 TL harcama yapıyor. Eğer tüm kâr işletmede kalıyorsa x hafta sonunda şirket kasasında bulunan parayı gösteren fonksiyon kuralı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $f(x) = 50000 + 3600x$

B) $f(x) = 44000 + 2400x$

C) $f(x) = 50000 + 2400x$

D) $f(x) = 50000 - 5600x$

E) $f(x) = 45000 + 6000x$

15. $y = mx^2 - (m-2)x + \frac{1}{4}$ parabolü x eksenine teğet olduğuna göre m aşağıdakilerden hangisi olabilir?

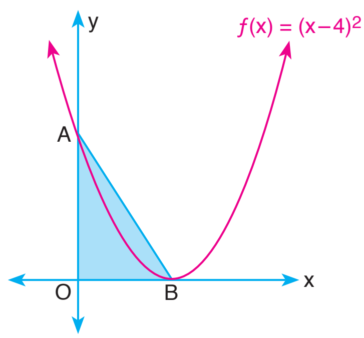
A) 4 B) $\frac{7}{2}$ C) 3 D) $\frac{1}{2}$ E) –1

16. Yanda analitik düzlemde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Grafiğin y eksenini kestiği nokta A noktası olduğuna göre $A(\widehat{AOB})$ kaç br²dir?

A) 34 B) 32 C) 26

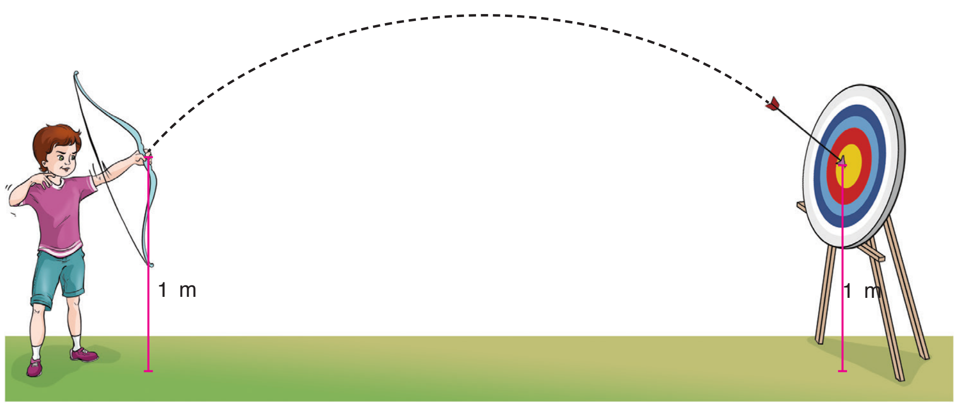
D) 28 E) 30



17. $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + (2a-4)x - 3a + 2$ parabolünün tepe noktası y ekseni üzerinde olduğuna göre a kaçtır?

A) 3 B) 2 C) 1 D) –1 E) –2

18.



Ahmet atış noktası yerden 1 metre yükseklikte olan yayı kullanarak 60 metre uzaklıktaki hedef tahtasının yerden 1 metre yükseklikteki merkezini okla vuruyor. Parabol şeklinde bir yol izleyen okun ulaştığı en yüksek noktanın yerden yüksekliği 10 metredir. Buna göre okun yerden yüksekliği 5 metre olduğunda yatayda ulaştığı uzaklık aşağıdakilerden hangisi olabilir?

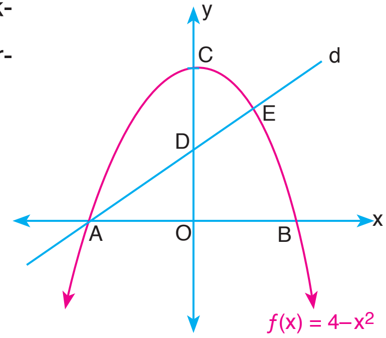
A) 35 B) 40 C) 45 D) 50 E) 55

19. $y = 3x^2 + ax + b$ parabolünün tepe noktası $T(1,8)$ olduğuna göre $a \cdot b$ değeri kaçtır?

A) -66 B) -56 C) 56 D) 66 E) 76

20. Yandaki analitik d doğrusu ile $f(x) = 4 - x^2$ parabölü A ve E noktalarında kesişiyor. $|OD| = |CD|$ olduğuna göre E noktasının ordinatı kaçtır?

A) 5 B) $\frac{9}{2}$ C) 4
D) $\frac{7}{2}$ E) 3

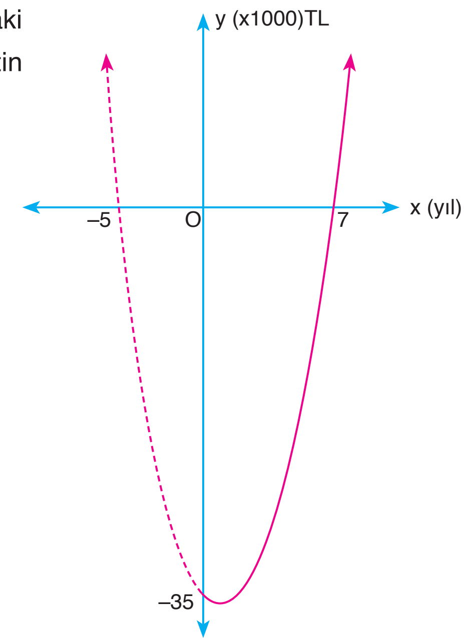


21. Bir mağazaya bir miktar ürün $(3x + 10)$ TL'ye alınıp $(-x^2 + 11x + 45)$ TL 'ye satılıyor. Bu satıştan en fazla kaç TL kâr yapılabilir?

A) 27 B) 33 C) 39 D) 44 E) 51

22. Yandaki grafik, borcu olan bir şirketin belli bir tarihten sonraki mali durumunu göstermektedir. Buna göre 8. yılda şirketin kârı kaç bin TL'dir?

A) 5 B) 7 C) 12
D) 13 E) 17



Ölçme ve Değerlendirme Soruları

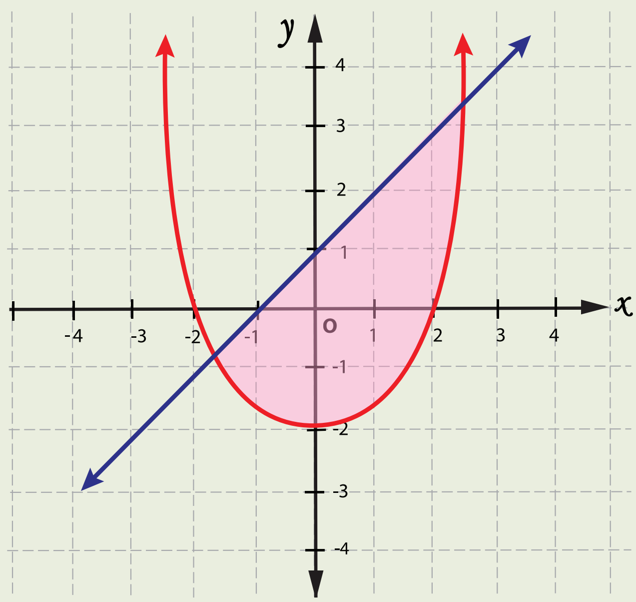
4

DENKLEM VE EŞİTSİZLİK SİSTEMLERİ

EBA

Bu bölümde;

- İkinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözüm kümesini bulmayı,
- İkinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklerin çözüm kümesini bulmayı,
- İkinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümesini bulmayı öğreneceksiniz.



Terimler ve Semboller

Terimler ve Kavramlar: ikinci dereceden eşitsizlikler

Hazırlık Çalışması

1. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

   a) $2(x-1)+3x=3x+1$ b) $x^2-5x+6=0$

2. Aşağıdaki denklem sistemlerinin çözüm kümesini bulunuz.

   a) $\left.\begin{matrix} x+y=6 \\ 2x+y=10 \end{matrix}\right\}$ b) $\left.\begin{matrix} x-2y=-3 \\ 2x-y=-4 \end{matrix}\right\}$

3. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümesini bulunuz.

   a) $4x \leqslant 12$ b) $3(x-1)+4(x+1) < 5x-4$

4. $y > 2x+1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

4.1. İKİNCİ DERECEDEN İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEM SİSTEMLERİ

Beden Kitle İndeksi

Beden kitle indeksi kilo ile boya göre hesaplanır ve kişinin genel olarak sağlıklı bir kilo aralığında olup olmadığını anlamaya yardım eder.

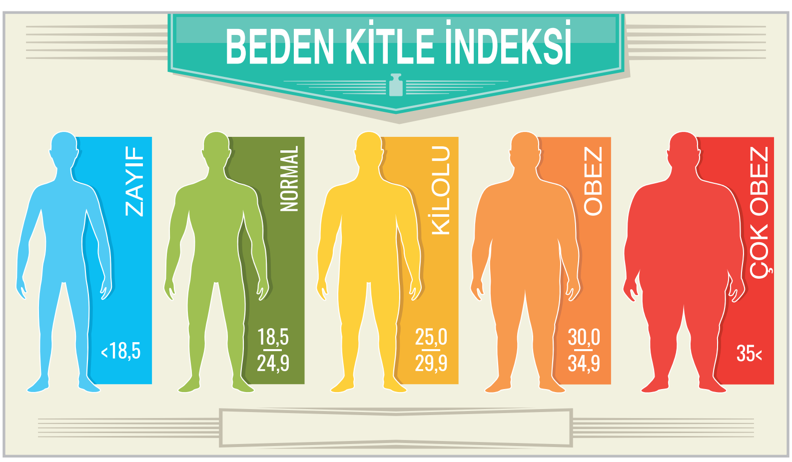
Beden kitle indeksine göre kişinin, ideal kiloda olup olmadığı belirlenir. Kilo alışverişinin sağlıklı bir sınır içinde gerçekleşip gerçekleşmediği takip edilir. Eğer bu sınırların dışına çıkılıyorsa sağlığı tehdit eden riskler ortaya çıkabilir demektir.

Beden kitle indeksi verilerini kullanmak bazı durumlarda uygun olmayabilir. Örneğin; 18 yaşının altındaki büyüme çağında olan bireyler, profesyonel sporcular, hamile veya emziren kadınlar ve 65 yaş üstü yetişkinler için beden kitle indeksini baz almak her zaman doğru olmayabilir.

Beden Kitle İndeksi Hesaplama

Beden kitle indeksini hesaplamak için kilo değerini, boy değerinin karesine bölmeniz gerekir. Örneğin boyunuz 160 cm, kilonuz da 50 kg ise

50 / (1,60) x (1,60) = 19,5 kg/m^{2}dir. Bu durumda sahip olduğunuz beden kitle indeksine göre sağlıklı bir kilodasınız demektir.



Beden Kitle İndeksi (BKİ)

- 18,5 kg/m^{2}nin altında ise kişi zayıf,
- 18,5-24,9 kg/m^2 aralığında ise kişi sağlıklı normal kiloda,
- 25-29,9 kg/m^2 aralığında ise kişi kilolu,
- 30-34,9 kg/m^2 aralığında ise kişi obez,
- 35 kg/m^2 ve üzerinde ise kişi çok obez olarak sınıflandırılır. Yukarıda verilen bilgilere göre 170 cm uzunluğundaki ve sağlıklı bir kişinin kilosu hangi aralıkta olmalıdır?

4.1.1. İkinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemlerinin Çözüm Kümesi

Bilgi

$a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ ve a, b, c gerçek sayılarından en az biri sıfırdan farklı olmak üzere

$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ şeklindeki ifadelere **ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem** denir.

İki bilinmeyenli en az iki denklemden oluşan sistemin denklemlerinden en az biri ikinci dereceden denklem ise bu sisteme **ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir.

Denklemlerin ortak çözüm kümesi denklem sisteminin çözüm kümesidir.

Örnek

$\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 60 \\ x + y &= 10 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Denklemler iki bilinmeyen içerdiğinden ve denklemlerden biri, ikinci dereceden olduğundan verilen denklemler ikinci dereceden iki bilinmeyenli bir denklem sistemi oluşturmuştur.

$x^2 - y^2 = 60 \Rightarrow (x+y)\cdot(x-y) = 60$ (iki kare farkı özdeşliği) $x + y = 10$ değerini yerine yazalım.

$10\cdot(x-y) = 60$

$x - y = 6$'dır.

$$\begin{array}{rl} & x - y = 6 \\ + & x + y = 10 \\ \hline & 2x = 16 \Rightarrow x = 8 \text{ olur.} \end{array}$$

$x + y = 10$

$8 + y = 10$

$y = 10 - 8 \Rightarrow y = 2$'dir.

Denklem sisteminin çözüm kümesi $Ç = \{(8, 2)\}$ bulunur.

Örnek

$$\left.\begin{array}{r} 3x^2 + 2y^2 = 11 \\ 4x^2 + y^2 = 8 \end{array}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2y^2 &= 11 \\ -2/4x^2 + y^2 &= 8 \end{aligned}$$ (Eşitliğin her iki yanını −2 ile çarpalım.)

$$\begin{aligned} 3x^2 + \cancel{2y^2} &= 11 \\ + \quad -8x^2 - \cancel{2y^2} &= -16 \\ \hline -5x^2 &= -5 \end{aligned}$$

$5x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$ olur.

Bu bulduğumuz x değerlerini birinci denklemde yerine yazarak y değerlerini bulalım.

$x = 1$ için $3x^2 + 2y^2 = 11 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2y^2 = 11 \Rightarrow 2y^2 = 8 \quad y^2 = 4 \Rightarrow y = \mp 2$ olur.

Yani $x = 1$ değeri için $y = 2$ veya $y = -2$'dir.

$x = -1$ için $3x^2 + 2y^2 = 11$

$3 \cdot (-1)^2 + 2y^2 = 11 \Rightarrow 2y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \mp 2$ olur.

Buradan denklem sisteminin çözüm kümesi $Ç = \{(-1,-2), (-1,2), (1,-2), (1,2)\}$ bulunur.

Örnek

$x^2 + 4y^2 = 24$

$x^2 - y^2 = 4$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} \cancel{x^2} + 4y^2 &= 24 \\ + \quad \cancel{-x^2} + y^2 &= -4 \\ \hline 5y^2 &= 20 \end{aligned}$$

$y^2 = 4 \Rightarrow y_{1,2} = \mp 2$ olur.

Bu değerler herhangi bir denklemde yerine yazılırsa

$y_1 = 2$ için, $x^2 - y^2 = 4 \Rightarrow x^2 - 4 = 4 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x_{1,2} = \mp 2\sqrt{2}$ olur.

$y_2 = -2$ için, $x^2 - y^2 = 4 \Rightarrow x^2 - (-2)^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x_{1,2} = \mp 2\sqrt{2}$ olur.

Buradan denklem sisteminin çözüm kümesi

$Ç = \{(2\sqrt{2},2), (-2\sqrt{2},2), (2\sqrt{2},-2), (-2\sqrt{2},-2)\}$ bulunur.

E-İçerik

Örnek

$$\left.\begin{aligned} x^2 - y - 4x - 5 = 0 \\ 2x - y - 14 = 0 \end{aligned}\right\}$$ denklem sisteminin çözümünü bulalım. Denklemlerin grafiklerini dinamik matematik yazılımını kullanarak çizelim.

Çözüm

$x^2 - y - 4x - 5 = 0 \Rightarrow y = x^2 - 4x - 5 \ldots (1)$

$2x - y - 14 = 0 \Rightarrow y = 2x - 14 \ldots (2)$ elde edilir.

(1) denkleminde y nin yerine (2) denklemindeki eşitini yazalım.

$$2x - 14 = x^2 - 4x - 5$$
$$x^2 - 6x + 9 = 0$$
$$(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ olur.}$$

$x^2 - y - 4x - 5 \Rightarrow y = x^2 - 4x - 5$ olur.

$x = 3$ için $y = x^2 - 4x - 5$

$= 3^2 - 4 \cdot 3 - 5$

$= 9 - 12 - 5$

$= -8$ olur.

$2x - y - 14 = 0 \Rightarrow y = 2x - 14$ olur.

$x = 3$ için $y = 2x - 14$

$= 2 \cdot 3 - 14$

$= 6 - 14$

$= -8$ olur.

Denklem sisteminin çözüm kümesi $Ç = \{(3, -8)\}$ bulunur.

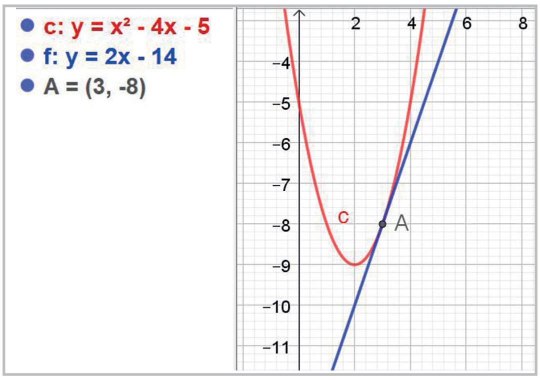
Dinamik matematik yazılımı çalıştıralım.

Giriş bölümüne $x^2 - y - 4x - 5 = 0$ yazıp Enter tuşuna bastığımızda ve $2x - y - 14 = 0$ yazıp Enter tuşuna bastığımızda yandaki grafikleri çizeriz.



Kesiştir seçtiğimizoe grafiklerin $(3, -8)$ noktasında kesiştiğini bulmuş oluruz.

Görüldüğü gibi grafiklerin kesim noktası, denklem sisteminin çözüm kümesidir.



Etkinlik

$\left.\begin{array}{r} 2x+y=3 \\ x^2-2xy=7 \end{array}\right\}$ denklem sistemi veriliyor.

- Her iki denklemde y leri x türünden yazınız.
- $y=f(x)$ olarak alınız ve her iki fonksiyonun grafiğini çiziniz.
- Grafiklerin kesiştiği noktaları belirleyiniz.
- Denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.
- Denklem sisteminin çözüm kümesi ile grafiklerin kesim noktalarını karşılaştırınız.
- Sonucu yorumlayınız.

Örnek

$\left.\begin{array}{l} y=x^2+4x+3 \\ y=x+1 \end{array}\right\}$ denklem sistemini sağlayan (x, y) ikililerini bulalım. Verilen denklemlerin grafiklerini dinamik matematik yazılımını kullanarak çizelim.

Çözüm

$\left.\begin{array}{l} y=x^2+4x+3 \\ y=x+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x^2+4x+3=x+1 \Rightarrow x^2+3x+2=0$

$x^2+3x+2=0$ denkleminde $a=1,\ b=3,\ c=2$'dir.

Buradan $\Delta=b^2-4ac=3^2-4\cdot1\cdot2=9-8=1>0$ olduğundan denklemlerin belirttiği parabol ve doğru, farklı iki noktada kesişir. O hâlde denklem sisteminin çözüm kümesi iki farklı (x, y) ikilisinden oluşur.

$x^2+3x+2=0$

$(x+2)\cdot(x+1)=0$

$x+2=0$ veya $x+1=0$

$x=-2$ veya $x=-1$ olur.

Bu değerler parabol denkleminde veya doğru denkleminde yerine yazılarak y değerleri bulunur.

$x=-2$ için $y=x+1$

$y=-2+1=-1$ olur.

$x=-1$ için $y=x+1$

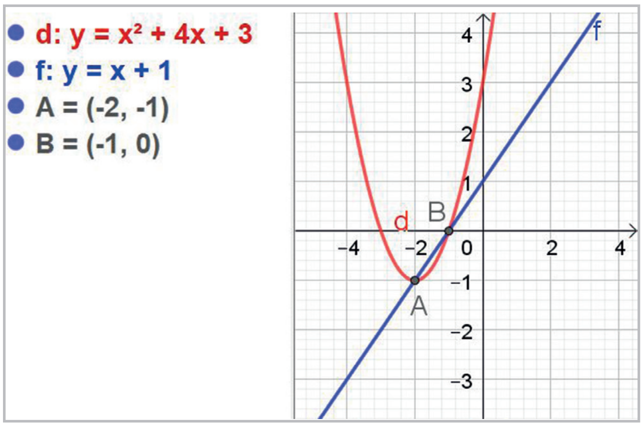
$y=-1+1=0$'dır.

O hâlde denklemin çözüm kümesi

$Ç = \{(-2,-1),(-1,0)\}$ bulunur.

Dinamik matematik yazılımı yardımıyla grafikler çizildiğinde yandaki gibi olur.

Parabol ile doğrunun kesiştikleri noktalar, denklem sisteminin çözüm kümesidir. Kesişme noktaları iki tane olduğundan doğru, parabolü farklı iki noktada kesmektedir.



Örnek

$$\left.\begin{aligned} x^2 - y - 3x + 1 &= 0 \\ 3x - y + n &= 0 \end{aligned}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesi bir tek (x, y) ikilisinden oluştuğuna göre

$x \cdot y$ değerini bulalım.

Çözüm

$$\left.\begin{aligned} x^2 - y - 3x + 1 &= 0 \\ 3x - y + n &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y &= x^2 - 3x + 1 \\ y &= 3x + n \end{aligned}$$

Denklem sisteminin bir tek çözümü varsa ve bunu geometrik olarak düşünürsek $y = x^2 - 3x + 1$ parabolü ile $y = 3x + n$ doğrusunun ortak bir noktası vardır yani parabol ile doğru teğettir.

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 - 3x + 1 \\ y &= 3x + n \end{aligned}\right\}$$ $x^2 - 3x + 1 = 3x + n \Rightarrow x^2 - 6x + 1 - n = 0$ olur. Bu denklemin birbirine eşit iki kökünün olması için diskriminantı sıfıra eşit olmalıdır.

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1(1-n) = 0 \Rightarrow 36 - 4 + 4n = 0 \Rightarrow 4n = -32 \Rightarrow n = -8$ olur.

$n = -8$ değerini denklemde yerine yazalım.

$x^2 - 6x + 1 - (-8) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$ olur.

$x = 3$ değeri, teğet noktasının apsisidir. Bu değeri denklemlerden birinde yerine yazalım.

$x = 3$ için $y = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow y = 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 \Rightarrow y = 9 - 9 + 1 \Rightarrow y = 1$ olur.

Buradan $x \cdot y = 3 \cdot 1 = 3$ bulunur.

Örnek

$$\left.\begin{aligned} 2x-y&=17 \\ 2x^2+3xy-2y^2&=17 \end{aligned}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$2x-y=17\ldots(1)$$

$$2x^2+3xy-2y^2=17\ldots(2)$$ olsun

(2) denklemini çarpanlarına ayıralım.

$$2x^2+3xy-2y^2=17 \quad\Rightarrow\quad (2x-y)\cdot(x+2y)=17$$

$2x$	$-y$	$17\cdot(x+2y)=17$
x	$2y$	$x+2y=1\ldots(3)$ olur.

(1) ve (3) denklemlerini ortak çözelim.

$$\begin{aligned} 2/\ 2x-y&=17 \quad (2 \text{ ile çarpalım.}) \\ x+2y&=1 \\ \hline 4x-\not{2y}&=34 \\ +\quad x+\not{2y}&=1 \\ \hline \end{aligned}$$

$5x=35 \Rightarrow x=7$ dir. $x=7$ değerini $x+2y=1$ denkleminde yerine yazalım.

$x=7$ için $7+2y=1 \Rightarrow 2y=-6 \Rightarrow y=-3$ olur. Denklem sisteminin çözüm kümesi $Ç=\{(7,-3)\}$ bulunur.

Örnek

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=15 \\ x\cdot y&=-6 \end{aligned}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=15\ldots(1) \\ x\cdot y&=-6\ \ldots(2) \end{aligned}\right.$$ olsun. (2) denkleminde y yi x türünden yazalım.

$x\cdot y=-6 \Rightarrow y=-\dfrac{6}{x}$'tir. (1) denkleminde y nin yerine x türünden eşitini yazalım.

$$x^2+y^2=15 \quad\Rightarrow\quad x^2+\left(-\frac{6}{x}\right)^2=15$$

$$x^2+\frac{36}{x^2}=15 \quad\Rightarrow\quad x^4-15x^2+36=0 \text{ olur.}$$

$x^2=t$ dersek $x^4-15x^2+36=0 \Rightarrow t^2-15t+36=0$'dır.

$t^2-15t+36=0 \Rightarrow (t-12)\cdot(t-3)=0 \Rightarrow t=12$ veya $t=3$'tür.

$x^2=t$ olduğundan $x^2=12$ veya $x^2=3$

$$x=\mp 2\sqrt{3} \qquad x=\mp\sqrt{3} \text{ bulunur.}$$

$y=-\frac{6}{x}$ olduğundan

$x=2\sqrt{3}$ için $y=-\frac{6}{2\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$,

$x=-2\sqrt{3}$ için $y=-\frac{6}{-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}$,

$x=\sqrt{3}$ için $y=-\frac{6}{\sqrt{3}}=-2\sqrt{3}$,

$x=-\sqrt{3}$ için $y=-\frac{6}{-\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$ olur. Buradan denklem sisteminin çözüm kümesi,

$Ç=\{(2\sqrt{3},-\sqrt{3}),(-2\sqrt{3},\sqrt{3}),(\sqrt{3},-2\sqrt{3}),(-\sqrt{3},2\sqrt{3})\}$ bulunur.

Örnek

$\left.\begin{array}{l} x^2+y-4x=0 \\ x^2-y+2x=0 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini, denklemlerin grafiklerini çizerek bulalım.

Çözüm

$\left.\begin{array}{l} x^2+y-4x=0 \\ x^2-y+2x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y=-x^2+4x \ldots(1) \\ y=x^2+2x \ldots(2) \end{array}$ olur.

(1) ve (2) denklemlerini birbirine eşitleyelim.

$-x^2+4x=x^2+2x$

$-2x^2+2x=0$

$-x^2+x=0$

$x^2-x=0$

$x(x-1)=0 \Rightarrow x=0$ veya $x-1=0 \Rightarrow x=1$ olur.

Bu değerleri denklemlerin herhangi birinde yerine yazarak y değerlerini bulalım.

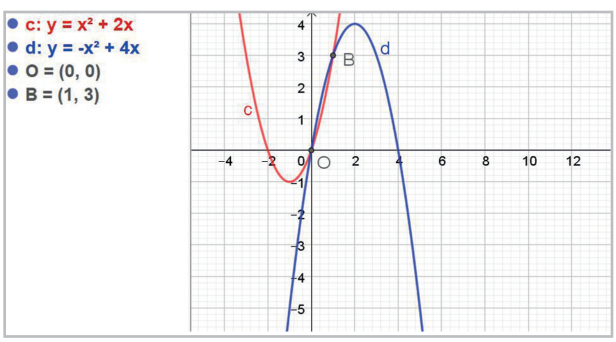
$x=0$ için $y=-x^2+4x \Rightarrow y=-0^2+4\cdot 0 \Rightarrow y=0$,

$x=1$ için $y=-x^2+4x \Rightarrow y=-1^2+4\cdot 1$

$y=-1+4 \Rightarrow y=3$ olur.

Buradan denklem sisteminin çözüm kümesi $Ç=\{(0,0),(1,3)\}$ bulunur.

Dinamik matematik yazılımı yardımıyla grafikler çizildiğinde yandaki gibi olur.



Denklem sisteminin çözüm kümesinin elemanı olan $(0,0)$ ve $(1,3)$ noktaları parabollerin kesişim noktasıdır.

Örnek

$$\left.\begin{array}{r} x^2-y-6x+2=0 \\ -x^2-y+2x+n=0 \end{array}\right\}$$ denklem sistemini sağlayan tek bir (x,y) ikilisi olduğuna göre $x+y$ değerini bulalım.

Çözüm

İkinci derece fonksiyonların grafiklerinin parabol belirttiğini biliyoruz. Denklem sisteminin çözüm kümesi tek elemanlıdır. Buna göre geometrik olarak düşünülürse paraboller birbirine teğettir.

$$\left.\begin{array}{r} x^2-y-6x+2=0 \\ -x^2-y+2x+n=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y=x^2-6x+2\ldots(1) \\ y=-x^2+2x+n\ldots(2) \end{array}$$ olsun.

(1) ve (2) denklemlerini birbirine eşitleyelim.

$x^2-6x+2=-x^2+2x+n$

$2x^2-8x+2-n=0$ olur. Paraboller teğet olduğundan ortak bir noktaları vardır. Elde edilen denklemin diskriminantı sıfıra eşit olmalıdır.

$\Delta=(-8)^2-4\cdot2\cdot(2-n) \Rightarrow 64-16+8n=0 \Rightarrow 48+8n=0 \Rightarrow 8n=-48 \Rightarrow n=-6$'dır.

$n=-6$ değerini denklemde yerine yazalım.

$$2x^2-8x+2-(-6)=0$$
$$2x^2-8x+8=0$$
$$x^2-4x+4=0$$
$$(x-2)^2=0 \Rightarrow x=2 \text{ olur.}$$

$x=2$ değeri, teğet noktasının apsisidir. Bu değeri denklemlerden birinde yerine yazalım.

$x=2$ için $y=x^2-6x+2 \Rightarrow y=2^2-6\cdot2+2$

$y=4-12+2$

$y=-6$ olur.

Buradan $x+y=2+(-6)=2-6=-4$ bulunur.

Örnek

$$\left.\begin{array}{r} y^2-x^2+3y+1=0 \\ x^2-y-1=0 \end{array}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$x^2-y-1=0 \Rightarrow x^2=y+1$ değerini birinci denklemde yerine yazalım.

$y^2-x^2+3y+1=0 \Rightarrow y^2-(y+1)+3y+1=0 \Rightarrow y^2-y-1+3y+1=0$

$y^2+2y=0 \Rightarrow y(y+2)=0 \Rightarrow y=0$ veya $y+2=0 \Rightarrow y=-2$

$x^2=y+1$

$y=0$ için $x^2=0+1=1 \Rightarrow x=\mp1$ olur. $y=-2$ için $x^2=-2+1 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\sqrt{-1}\notin\mathbb{R}$ olduğundan $y=-2$ için denklemin gerçek sayılar kümesinde çözümü yoktur. Buradan denklem sisteminin çözüm kümesi $Ç=\{(-1,0),(1,0)\}$ bulunur.

Alıştırmalar 4-1

1. $\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 72 \\ x - y &= 6 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

2. $\left.\begin{aligned} 3x + y &= 19 \\ 6x^2 - xy - y^2 &= 19 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

3. $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 10 \\ x \cdot y &= -4 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

4. $\left.\begin{aligned} x^2 - y - 4x + 6 &= 0 \\ 2x - y + n &= 0 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesi tek elemanlı olduğuna göre denklem sisteminin çözümünü gösteren grafiği çiziniz.

5. $\left.\begin{aligned} x^2 - y - 4x + 6 &= 0 \\ y - 2x + 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{(4,-6),(2,-10)\}$
B) $\{(2,-6),(4,-10)\}$
C) $\{(4,6),(2,2)\}$
D) $\{(4,6),(2,-2)\}$
E) $\{(2,-10),(4,6)\}$

6. $\left.\begin{aligned} 3x^2 - 2y^2 &= 13 \\ x^2 + y^2 &= 6 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

7. $\left.\begin{aligned} x^2 - y - 4x - 5 &= 0 \\ -x^2 - y + 10x + 11 &= 0 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözümünü bulup bu çözümü grafik üzerinde gösteriniz.

8. $\left.\begin{aligned} x^2 + 3y^2 &= 16 \\ x^2 - y^2 &= 3 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

4.2. İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ EŞİTSİZLİKLER VE EŞİTSİZLİK SİSTEMLERİ

İkinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklere geçmeden önce birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikleri hatırlayalım.

Hatırlatma

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax + b > 0$, $ax + b < 0$ $ax + b \geqslant 0$, $ax + b \leqslant 0$ şeklindeki ifadelere **birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik** denir.

Eşitsizliğin doğru olmasını sağlayan x gerçek sayılarının oluşturduğu kümeye **eşitsizliğin çözüm kümesi** denir.

Örnek

$2x - 4 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini cebirsel olarak bulalım, sayı doğrusunda gösterelim ve bu eşitsizlik için işaret tablosu düzenleyelim.

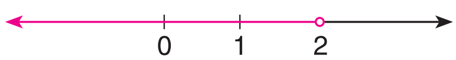
Çözüm

$2x - 4 < 0$

$2x < 4$

$x < 2$

Bu durumu sayı doğrusunda gösterelim.



$2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$ olur.

Bu eşitsizliğe ait işaret tablosu yandaki gibidir.

Eşitsizliğin çözüm kümesi, taralı bölgedir.

x	$-\infty$	2	∞
$2x - 4$	$-$	○	$+$

Bilgi

$ax + b = 0$ için $x = -\frac{b}{a}$ olur. Bu ifade için işaret tablosu yandaki gibi olur.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	∞
$x = -\frac{b}{a}$	a'nın işareti ile ters işaretli	○	a'nın işareti ile aynı işaretli

Tek katlı kök "○", çift katlı kök "○" biçiminde gösterilir.

Eşitsizlikte $\leqslant$ veya $\geqslant$ olduğu durumlarda "●" biçiminde gösterilir. Ayrıca paydanın köklerinde daima "○" kullanılır. Bu semboller sadece kitap için gösterilmiştir.

Örnek

$-3x-8 \leqslant 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$-3x-8=0$$
$$-3x=8$$
$$x=-\frac{8}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{8}{3}$	∞
$-3x-8$	$+$	$\bullet$	$-$

Buradan eşitsizliğin çözüm kümesi

$Ç=\left[-\frac{8}{3},\infty\right)$ ya da

$Ç=\left\{x \mid x\in\mathbb{R}\ ,\ -\frac{8}{3}\leqslant x<\infty\right\}$ bulunur.

Örnek

$3(x-1)+2<2\left(x-\frac{1}{2}\right)+4+x$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$3(x-1)+2<2\left(x-\frac{1}{2}\right)+4+x$$
$$3x-3+2<2x-1+4+x$$
$$3x-1<3x+3$$
$$3x-3x<3+1$$
$$0<4 \text{ olur.}$$

Bu ifade doğru olduğu için eşitsizlik, tüm x gerçek sayıları için sağlanır.

Buradan eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç=\mathbb{R}$ dir.

4.2.1. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizliklerin Çözüm Kümesi

Bilgi

$a,b,c\in\mathbb{R}$ ve $a\neq 0$ olmak üzere $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geqslant 0$ ve $ax^2+bx+c\leqslant 0$ biçimindeki ifadelere **ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler** denir.

Eşitsizliğin doğru olmasını sağlayan x gerçek sayılarının oluşturduğu kümeye de **eşitsizliğin çözüm kümesi** adı verilir.

Örnek

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - x - 1$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiğini çizelim ve işaret tablosunu yapalım.

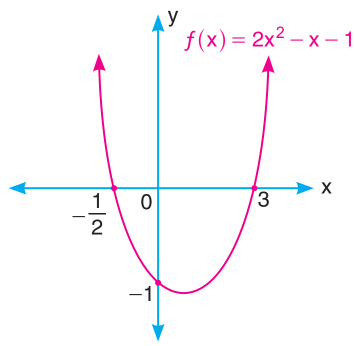
Çözüm

$2x^2 - x - 1 = 0$ için $\Delta = -b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 > 0$ olduğundan denklemin 2 farklı gerçek kökü vardır.

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \text{ ve } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-1-\sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$$

Bu fonksiyonun grafiği ve işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		∞
$f(x) = 2x^2 - x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	



Fonksiyon $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, \infty)$ nda pozitif, $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ nda negatif değeri almıştır.

Örnek

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 6x + 9$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiğini çizelim ve işaret tablosunu yapalım.

Çözüm

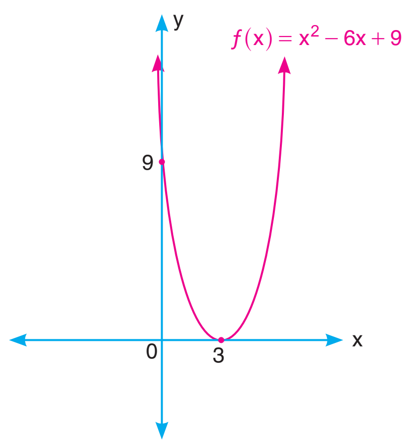
$f(x) = x^2 - 6x + 9$ için

$\Delta = -b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$ olup birbirine eşit iki gerçek kök vardır.

Bu kökler $x_1 = x_2 = -\frac{-b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = 3$'tür.

Bu fonksiyonun grafiği ve işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$		3		∞
$f(x) = x^2 + 6x + 9$		$+$	0	$+$	



Tabloyu incelediğimiz kökün sağının ve solunun aynı işaretli olduğuna dikkat ediniz.

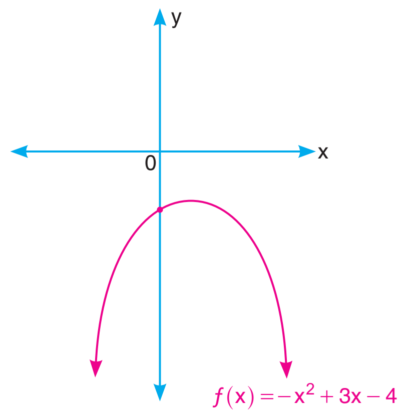
Örnek

$f(x) = x^2 + 3x - 4$ terimlisinin işaretini inceleyelim.

Çözüm

$-x^2 + 3x - 4 = 0$ için $\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-1)(-4) = -7 < 0$ olduğundan denklemin gerçek kökü yoktur.

x	$-\infty$	∞
$-x^2 + 3x - 4$	− − − − − − − − − − −	



Bilgi

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

I. $\Delta > 0$ için

x	$-\infty$	x_1		x_2		∞
$ax^2 + bx + c$'nin işareti	a ile aynı işaretli	○	a ile zıt işaretli	○	a ile aynı işaretli	

II. $\Delta = 0$ için

x	$-\infty$	$x_1 = x_2$		∞
$ax^2 + bx + c$'nin işareti	a ile aynı işaretli	○	a ile aynı işaretli	

III. $\Delta < 0$ için

x	$-\infty$	∞
$ax^2 + bx + c$'nin işareti	a ile aynı işaretli	

Örnek

$f(x) = x^2 + x + 9$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun işaretini inceleyelim.

Çözüm

$f(x) = y = x^2 + x + 9$

$a = 1, \; b = 1, \; c = 9$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9$

$= 1 - 36$

$= -35 < 0$ olduğundan f fonksiyonunu sıfır yapan $x \in \mathbb{R}$ yoktur.

$a = 1 > 0$ olur.

x	$-\infty$	∞
f	a nın işaretinin aynısı	

x	$-\infty$					∞
$x^2 + x + 9$	+	+	+	+	+	+

Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x^2 + x + 9$ fonksiyonu pozitiftir.

Örnek

$f(x) = -x^2 + 2x - 1$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun işaretini inceleyelim.

Çözüm

$f(x) = y = -x^2 + 2x - 1$

$a = -1, \; b = 2, \; c = -1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)$

$= 4 - 4$

$\Delta = 0$ olduğundan $-x^2 + 2x - 1 = 0$ denkleminin iki eşit kökü vardır.

$x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow x_1 = x_2 = \dfrac{-2}{2(-1)} = \dfrac{-2}{-2} = 1$ olur.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	∞
f	a'nın işaretinin aynısı	o	a'nın işaretinin aynısı

x	$-\infty$	1	∞
$-x^2+2x-1$	$-$	o	$-$

$x=1$ için $f(x)=0$ ve her $x \in \mathbb{R}-\{1\}$ için $f(x)=-x^2+2x-1$ fonksiyonu negatiftir.

Örnek

$f(x)=x^2-3x-10$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun işaretini inceleyelim.

Çözüm

$f(x)=y=x^2-3x-10$

$a=1,\ b=-3,\ c=-10$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-10)\\ &=9+40\\ &=49>0\end{aligned}$$

olduğundan $x^2-3x-10=0$ denkleminin farklı iki gerçek kökü vardır.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)+\sqrt{49}}{2\cdot1}=\frac{3+7}{2}=\frac{10}{2}=5$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)-\sqrt{49}}{2\cdot1}=\frac{3-7}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

x	$-\infty$	x_1		x_2	∞
f	a'nın işaretinin aynısı	o	a'nın işaretinin tersi	o	a'nın işaretinin aynısı

x	$-\infty$	-2		5	∞
$x^2-3x-10$	$+$	o	$-$	o	$+$

$f(x)=x^2-3x-10$ fonksiyonu, $(-\infty,-2)$ ve $(5,+\infty)$ aralığında pozitif, $(-2,5)$ aralığında da negatiftir. $x=-2$ ve $x=5$ için $f(x)=0$ olur.

Örnek

$x^2 + 3x - 4 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$x^2 + 3x - 4 = 0$ denkleminin köklerini bulalım.

$x^2 + 3x - 4 = (x + 4) \cdot (x - 1) = 0 \Rightarrow x = -4$ veya $x = 1$ olur.

Bu kökleri işaret tablosuna küçükten büyüğe doğru yazalım. x^2 nin katsayısının işareti pozitiftir.

x	$-\infty$	-4		1	∞
$x^2 + 3x - 4$	$+$		$-$		$+$

Eşitsizliğin çözüm kümesi, taralı bölge olan $Ç = (-4, 1)$ olur.

Örnek

Yazıcı üreten bir şirketin, x tane yazıcı satışından elde ettiği hasılat $x \cdot (100 - 0,01x)$ TL'dir. x tane yazıcının maliyeti ise $20x + 100\,000$ TL'dir. Bu şirketin 20 000 TL'den fazla kâr elde edebilmesi için x in hangi aralıklarda değer alacağını bulalım.



Çözüm

Kâr = Satış Fiyatı − Maliyet Fiyatı bağıntısı vardır.

Satış $= x \cdot (100 - 0,01x)$, Maliyet $= 20x + 100\,000$ TL'dir.

$$\begin{aligned} \text{Kâr} &= x \cdot (100 - 0,01x) - (20x + 100\,000) \\ &= 100x - 0,01x^2 - 20x - 100\,000 \\ &= -0,01x^2 + 80x - 100\,000 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Kâr $> 20\,000$ olduğundan

$-0,01x^2 + 80x - 100\,000 > 20\,000$

$-0,01x^2 + 80x - 120\,000 > 0$ dır. Bu eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

$-0,01x^2 + 80x - 120\,000 = 0$ denkleminin köklerini bulalım.

$$-\frac{1}{100}x^2 + 80x - 120\,000 = 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{10}x + 200\right) \cdot \left(\frac{1}{10}x - 600\right) = 0$$

$$\begin{matrix} -\frac{1}{10}x & \quad & 200 \\ \frac{1}{10}x & \quad & -600 \end{matrix}$$

$-\frac{1}{10}x + 200 = 0$ veya $\frac{1}{10}x - 600 = 0$

$-\frac{1}{10}x = -200$, $\frac{1}{10}x = 600$

$x = 2000$, $x = 6000$ olur.

Eşitsizliğin işaret tablosunu yapalım.

x	$-\infty$	2000		6000	∞
$-0,01x^2+80x-120\,000$	$-$	○	$+$	○	$-$

Tabloda taralı bölge, eşitsizliğin çözüm aralığıdır. Bu şirket 2000 ile 6000 arasında yazıcı satarsa 20 000 TL'den fazla kâr elde eder.

Örnek

$y=-x^2+3x-2$ olmak üzere $-x^2+3x-2 \geqslant 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım. Eşitsizliğin çözüm kümesini grafik üzerinde gösterelim.

Çözüm

$-x^2+3x-2=0$ denkleminin köklerini bulalım.

$$-x^2+3x-2=0 \Rightarrow -(x^2-3x+2)=0 \Rightarrow (x-2)\cdot(x-1)=0$$

$$x-2=0 \quad \text{veya} \quad x-1=0$$

$$x=2 \qquad\qquad x=1 \text{ olur.}$$

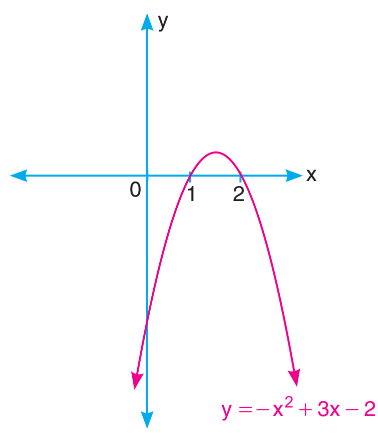
Eşitsizlik için işaret tablosu yapalım. x^2 nin katsayısının işareti $(-)$'dir.

Eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç=[1,2]$ olur.

$y=-x^2+3x-2$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

- $a=-1<0$ olduğundan parabolün kolları aşağı doğrudur.
- $x=0$ için $y=-2$ olduğundan parabol, y eksenini $(0,-2)$ noktasında keser.

$y=0$ için denklemin kökleri $x=1$ ve $x=2$ olduğundan parabol x eksenini $(1,0)$ ve $(2,0)$ noktalarında keser.



- Tepe noktası $T(r,k)$ olmak üzere

$$r=-\frac{b}{2a} \Rightarrow r=-\frac{3}{2\cdot(-1)}=\frac{3}{2}$$

$$k=f(r) \Rightarrow k=f\left(\frac{3}{2}\right)=-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3\cdot\frac{3}{2}-2$$

$$=-\frac{9}{4}+\underset{(2)}{\frac{9}{2}}-\underset{(4)}{\frac{2}{1}}$$

$$=-\frac{9}{4}+\frac{18}{4}-\frac{8}{4}=\frac{1}{4} \text{ olur.}$$

$-x^2+3x-2 \geqslant 0$ eşitsizliğinin grafik üzerindeki çözüm aralığı $[1,2]$ olur.

Grafikte görüldüğü gibi $y=-x^2+3x-2$ fonksiyonu $(1,2)$ aralığında pozitif değer, $x=1$ ve $x=2$ değerlerinde $f(x)=0$ değerini almıştır.

Örnek

$f(x) = x^2 - 6x + 8$ olmak üzere $f(x) \geqslant 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini grafik üzerinde gösterelim.

Çözüm

$f(x) = x^2 - 6x + 8$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

- $a = 1 > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur.
- $x = 0$ için $y = 8$ olduğundan grafik, y eksenini $(0, 8)$ noktasında keser.

$y = 0$ için

$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x-4)\cdot(x-2) = 0$ olur.

$x - 4 = 0$ veya $x - 2 = 0$

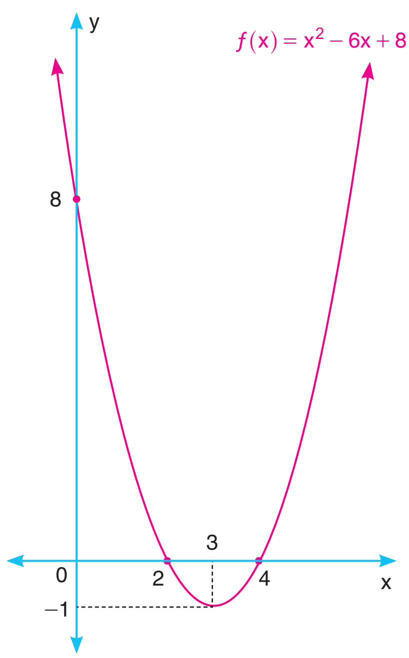
$x = 4$ $\quad$ $x = 2$ olduğundan grafik

x eksenini $(2,0)$ ve $(4,0)$ noktalarında keser.

- Tepe noktası $T(r,k)$ olmak üzere

$$r = -\frac{b}{2\cdot a} = -\frac{(-6)}{2\cdot 1} = 3,$$

$k = f(r) \Rightarrow k = f(3) = 3^2 - 6\cdot 3 + 8 = -1$'dir.



Elde edilen verilerle çizilen grafikten görüldüğü gibi çözüm kümesi $Ç = (-\infty, 2] \cup [4, \infty)$ bulunur.

Örnek

$(x-x^2)\cdot(x-2) \geqslant 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$(x-x^2)(x-2)=0$ denkleminin köklerini bulalım.

$x-x^2=0$ $\qquad\qquad\qquad x-2=0$

$x(1-x)=0$ $\qquad\qquad\qquad x=2$

$x=0$ veya $1-x=0$

$x=1$

x	$-\infty$		0		1		2		∞
$x-x^2$		$-$	●	$+$	●	$-$		$-$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	●	$+$	
$(x-x^2)(x-2)$		$+$	●	$-$	●	$+$	●	$-$	

Eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç=(-\infty,0]\cup[1,2]$ olur.

- Eşitsizlikleri sıfır yapan değerler, kritik noktalardır. Kritik nokta, aynı zamanda polinom denkleminin (sıfırları) kökü olur.

- Çarpım şeklindeki eşitsizliklerin işaret tablosu yapılırken eşitsizlikteki en büyük dereceli terimlerin katsayılarının çarpımının işareti bulunur. Tabloya kritik noktalar yerleştirildikten sonra en sağdan, katsayıların işaretlerinin çarpımı sonucu bulunan işaretle başlanır. Tek katlı köklerde işaret değiştirilir, çift katlı köklerde işaret değiştirilmez.

- Tek katlı kök, kuvveti tek tam sayı olan köktür. Çift katlı kök ise kuvveti çift tam sayı olan köktür.

$(x-a)^n$ ifadesinde $x=a$ dır. $\begin{cases} \text{n çift ise a çift katlı köktür.} \\ \text{n tek ise a tek katlı köktür.} \end{cases}$

Örnek

$(x-1)\cdot(x^2+4x+4) \geqslant 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$(x-1)\cdot(x^2+4x+4) \geqslant 0 \;\Rightarrow\; (x-1)\cdot(x+2)^2 \geqslant 0$ ifadesinde kritik noktalar ifadeyi sıfır yapan değerlerdir.

$x-1=0$ veya $(x+2)^2=0$

$x=1$ $\quad\quad$ $x=-2$ çift katlı köktür.

Eşitsizliğin işaret tablosunu yapalım.

x	$-\infty$		-2		1		∞
$(x-1)\cdot(x^2+4x+4)$		$-$	●	$-$	●	$+$	
			Çift katlı kök				

Eşitsizliğin çözüm kümesi, -2 ve taralı bölgedir. Buradan $Ç=[1,+\infty)\cup\{-2\}$ bulunur.

Örnek

$(x+2)^2\cdot(x^2+x-2) \leqslant 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$(x+2)^2\cdot(x^2+x-2)=0$

$(x+2)^2=0$

$x+2=0$

$x=-2$ çift katlı köktür.

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$x+2=0$ veya $x-1=0$

$x=-2$ $\quad\quad$ $x=1$ olur.

Eşitsizlikteki en büyük dereceli terimlerin katsayılarının işaretleri çarpımı $(+)\cdot(+)=(+)$ dır. İşaret tablosunda en sağdan $(+)$ ile başlarız. $x=-2$ kökünden 3 tane oluştuğu için tek katlı köke dönüşür.

Buna göre eşitsizliğin işaret tablosunu yapalım.

x	$-\infty$		-2		1		∞
$(x+2)^2\cdot(x^2+x-2)$		$+$	●	$-$	●	$+$	

Eşitsizliğin çözüm aralığı taralı bölgedir. Buradan çözüm kümesi $Ç=[-2,1]$ bulunur.

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ biçimindeki eşitsizliklerde,

$Q(x) \neq 0$ olmak üzere $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ifadesinin işareti incelenirken pay ve paydadaki çarpanların kökleri, işaret tablosuna küçükten büyüğe doğru sırayla yazılır. Her bir çarpanın başkatsayısının işareti çarpılıp, işaret tablosunun sağ hücresine yazılacak işaret bulunarak işaret tablosu yapılır. Paydanın kökleri çözüm kümesine dâhil edilmez.

Örnek

$\dfrac{(x-1)(2x+6)}{x-5} \leqslant 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$x-1$ in başkatsayısının işareti $(+)$,

$2x+6$ nın başkatsayısının işareti $(+)$,

$x-5$ in başkatsayısının işareti $(+)$'dır.

$(+)\cdot(+)\cdot(+)=(+)$ olduğundan tablonun sağ hücresinin işareti $(+)$'dır.

Her bir çarpanın kökünü bulalım.

$x-1=0 \Rightarrow x=1,$

$2x+6=0 \Rightarrow 2x=-6 \Rightarrow x=-3,$

$x-5=0 \Rightarrow x=5$ olur.

x	$-\infty$		-3		1		5		∞
$\dfrac{(x-1)\cdot(2x+6)}{x-5}$		$-$	●	$+$	●	$-$	○	$+$	

5, paydanın kökü olduğundan çözüm kümesine alınmaz.

Eşitliğin çözüm kümesi $Ç=(-\infty,-3]\cup[1,5)$ bulunur.

Örnek

$\dfrac{x^2-1}{3-x} \leqslant 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$\dfrac{x^2-1}{3-x} \leqslant 0 \Rightarrow \dfrac{(x+1)\cdot(x-1)}{3-x} \leqslant 0$'dır. $x+1$'in başkatsayısının işareti $(+)$, $x-1$'in başkatsayısının işareti $(+)$, $3-x$ in başkatsayısının işareti $(-)$ olduğundan $(+)\cdot(+)\cdot(-)=(-)$ dir. Tablonun sağ hücresinin işareti $(-)$ dir. Her bir çarpanın kökünü bulalım.

$x+1=0,\ x-1=0$ veya $3-x=0$'dır.

$x=-1, \quad x=1 \quad$ veya $\quad x=3$

x	$-\infty$	-1		1		3	∞
$\dfrac{x^2-1}{3-x}$	$+$	●	$-$	●	$+$	○	$-$

Eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç=[-1,1]\cup(3,\infty)$ bulunur.

Örnek

Bir yayınevi x adet kitap için ortalama maliyeti $\dfrac{15x+350\,000}{x}$ TL olarak hesaplamıştır. Maliyetin 20 TL'nin altına düşmesi için yayınevinin en az kaç kitap basması gerektiğini bulalım.

Çözüm

Ortalama maliyet $=\dfrac{15x+350\,000}{x}$ ise maliyetin 20 TL'nin altına düşmesi için

$\dfrac{15x+350\,000}{x} < 20$ olmalıdır. Buradan

$\dfrac{15x+350\,000}{x} - 20 < 0$

$\dfrac{15x+350\,000}{x} - \dfrac{20x}{x} < 0$

$\dfrac{-5x+350\,000}{x} < 0$'dır. Pay ve paydanın köklerini bulup işaret tablosu yapalım.

$-5x+350\,000=0 \Rightarrow -5x=-350\,000$

$5x=350\,000$

$x=70\,000$

Paydanın kökü $x=0$'dır. $-5x$ in başkatsayısının işareti $(-)$, x in başkatsayısının işareti $(+)$'dır. $(-)\cdot(+)=(-)$ olduğundan en sağdan, $(-)$ ile başlarız.

x	$-\infty$	0		$70\,000$	∞
$\dfrac{-5x+350\,000}{x}$	$-$	○	$+$	○	$-$

Burada kitap adedinden bahsedildiğinden $(-\infty,0)$ çözüme dâhil olmaz. Çözüm kümesi $(70\,000,\infty)$ dır. O hâlde maliyetin 20 TL'nin altına düşmesi için yayınevinin en az 70 001 kitap basması gerekir.

Örnek

$x(x-3) < (2x-1)\cdot(x-3)$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$x(x-3) < (2x-1)\cdot(x-3) \Rightarrow x(x-3)-(2x-1)\cdot(x-3) < 0$$

$$(x-3)[x-(2x-1)] < 0$$

$$(x-3)\cdot(x-2x+1) < 0$$

$$(x-3)\cdot(-x+1) < 0 \text{ olur.}$$

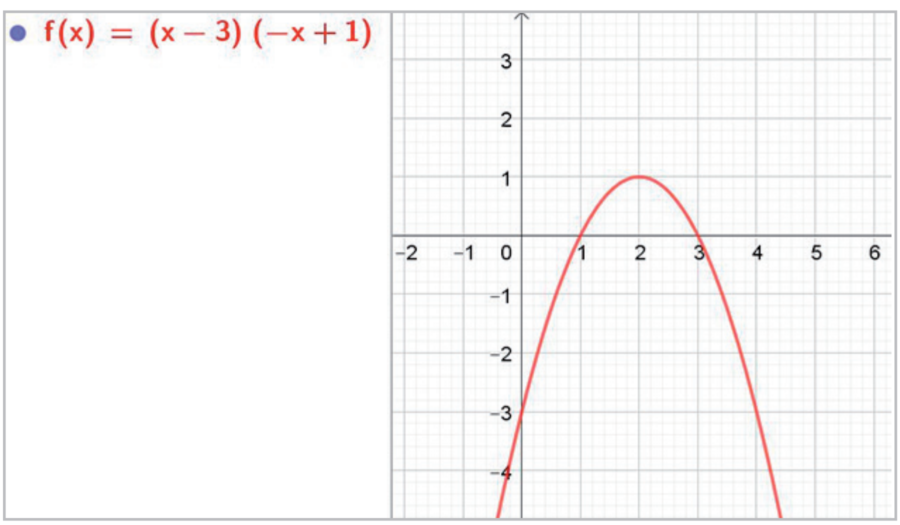
Kritik noktalar $x-3=0$ veya $-x+1=0$
$x=3$ $x=1$ olur.

Eşitsizlik için işaret tablosu yapalım. Çarpanların en büyük dereceli terimlerinin baş katsayılarının işaretleri çarpımı $(-)$ olduğundan en sağdan, $(-)$ ile başlarız.

x	$-\infty$		1		3		∞
$(x-3)\cdot(-x+1)$		$-$	o	$+$	o	$-$	

Eşitsizliğin çözüm kümesi, $Ç=(-\infty,1)\cup(3,\infty)$ veya $Ç=\mathbb{R}-[1,3]$ biçiminde de gösterilebilir.

Dinamik matematik yazılımında giriş bölümüne $f(x)=(x-3)(-x+1)$ yazılıp Enter tuşuna bastığımızda aşağıdaki grafiği çizmiş oluruz.



Grafikte de görüldüğü gibi $f(x)=(x-3)(-x+1)$ kuralı ile verilen f fonksiyonu $(-\infty,1)\cup(3,\infty)$ aralıklarında negatif değerler almıştır.

Örnek

$\frac{1}{x} < x$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$\frac{1}{x} < x \Rightarrow \frac{1}{x} - x < 0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{x} < 0$ olur. Buradan

$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1$ veya $x = 1$ olur.

$x = 0$ paydanın köküdür. En büyük dereceli terimlerin işaretleri çarpımı $(-)$'dir.

x	$-\infty$	-1		0		1		∞
$\frac{1}{x} - x$	$+$	○	$-$	○	$+$	○	$-$	

Eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç = (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ bulunur.

Örnek

$\frac{2}{x-3} \leqslant \frac{1}{x-1}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\underset{(x-1)}{\frac{2}{x-3}} - \underset{(x-3)}{\frac{1}{x-1}} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{2x-2}{(x-3)\cdot(x-1)} - \frac{x-3}{(x-3)\cdot(x-1)} \leqslant 0$$

$$\frac{2x-2-x+3}{(x-3)\cdot(x-1)} \leqslant 0$$

$\frac{x+1}{(x-3)\cdot(x-1)} \leqslant 0$ olur. Buradan kökler,

$x + 1 = 0, \quad x - 3 = 0, \quad x - 1 = 0$

$x = -1, \quad x = 3, \quad x = 1$ olur. 3 ve 1 paydanın köküdür.

$\frac{(+)}{(+)\cdot(+)} = (+)$ olur. En sağdan, $(+)$ ile başlarız.

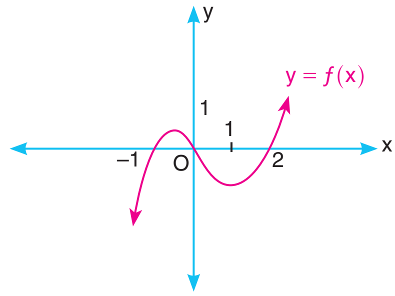
x	$-\infty$		-1		1		3		∞
$\frac{x+1}{(x-3)\cdot(x-1)}$		$-$	●	$+$	○	$-$	○	$+$	

Eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç = (-\infty, -1] \cup (1, 3)$ bulunur.

E-İçerik

Örnek

Yanda $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $(x^2-9)\cdot f(x) \leqslant 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.



Çözüm

$x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\mp 3$ olur.

$f(x)$ fonksiyonu $(-\infty,-1)\cup(0,2)$ aralığında negatif, $(-1,0)\cup(2,\infty)$ aralığında pozitif değer almıştır. $f(x)=0$ denkleminin kökleri -1, 0 ve 2'dir.

Bulduğumuz kökleri işaret tablosunda yazalım ve işaretleri belirleyelim.

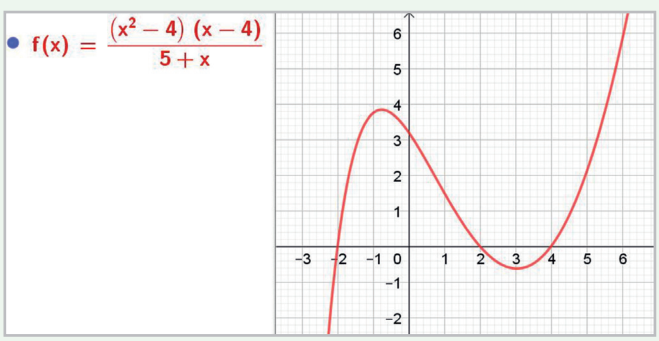
x	$-\infty$ ... -3	-3 ... -1	-1 ... 0	0 ... 2	2 ... 3	3 ... ∞
x^2-9	+	–	–	–	–	+
$f(x)$	–	–	+	–	+	+
$(x^2-9)\cdot f(x)$	–	+	–	+	–	+

Eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç=(-\infty,-3]\cup[-1,0]\cup[2,3]$ olur.

Bilgi-İletişim Teknolojisi

$f(x)=\dfrac{(x^2-4)(x-4)}{5+x}$ fonksiyonunun grafiğini dinamik matematik yazılımını kullanarak çizelim. Fonksiyonun işaretini inceleyelim.

Dinamik matematik yazılımını çalıştırıp giriş bölümüne fonksiyonu yazarak Enter tuşuna bastığımızda yandaki grafiği elde ederiz. (x^2yi yazmak için önce x yazılır sonra Ctrl+Alt tuşlarına birlikte basılı tutup H tuşuna bastığımızda ^ sembolü gelir sonra da 2'ye basılır.)



Grafikte görüldüğü gibi $f(x)$ fonksiyonu, $x=-2$, $x=2$ ve $x=4$ noktalarında 0 değerini alır. $f(x)$ fonksiyonu $(-\infty,-2)\cup(2,4)$ nda negatif değer ve $(-2,2)\cup(4,\infty)$ nda pozitif değer alır.

Alıştırmalar 4-2

1. $x^2 - 2x - 8 \leqslant 0$ eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x tam sayısı vardır?

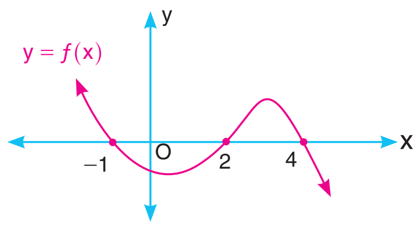
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

2. Karesi, 3 katının 10 fazlasından küçük olan tam sayıların toplamı kaçtır?

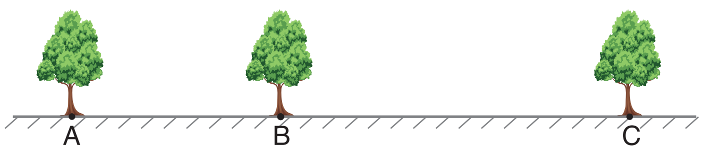
A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

3. $(x^2 - 2x)(x + 3)(x^2 + 1) \leqslant 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

4. Yanda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $\dfrac{f(x)}{x^2 + x - 6} \leqslant 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.



5.



Şekilde bir yol boyunca A, B ve C ağaçları verilmiştir.

- A ağacının B ağacına olan uzaklığı $(x^2 + 4x + 10)$ metre.
- B ağacının C ağacına olan uzaklığı $(3x + 16)$ metredir.
- B ağacının C ağacına olan uzaklığı, A ağacının B ağacına olan uzaklığından fazladır.

x bir tam sayı olduğuna göre A ağacının B ağacına olan uzaklığı en az kaç metredir?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

6. $2x^2 - x + 1 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

7. $a \in \mathbb{R}$, $x^2 - ax + 1 > 0$ eşitsizliği her x gerçek sayısı için sağlandığına göre a nın bulunduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-2, 0)$ B) $(0, 2)$ C) $(-2, 2)$ D) $[-2, 0)$ E) $[-2, 2]$

8. $\dfrac{(2x-1)\cdot(x^2 + 3x + 2)}{(x-2)} > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

4.2.2. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlik Sistemlerinin Çözüm Kümesi

Bundan önceki kısımda ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulduk. Burada ise birden fazla eşitsizliğin bulunduğu durumlarda bu eşitsizlikleri aynı anda sağlayan çözüm kümelerini bulmayı öğreneceğiz.

İki veya daha çok eşitsizliğin bulunduğu eşitsizliklere **eşitsizlik sistemi** denir.

Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi bulunurken her bir eşitsizliğin çözüm kümesi bulunur. Eşitsizliklere ait çözüm kümelerinin kesişimi olan kümeye **eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi** denir.

Örnek

$$\left.\begin{aligned} x^2-7x+10 &< 0 \\ x-3 &\geq 0 \end{aligned}\right\}$$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Aynı tabloda iki eşitsizliğin çözüm kümelerini ayrı ayrı bulup ortak bölgeyi sonra belirleyelim.

$x^2-7x+10=0$ ve $x-3=0$ denklemlerinin köklerini bulup aynı işaret tablosunda gösterelim.

$x^2-7x+10=0$

$(x-2)\cdot(x-5)=0$

$x-2=0$ veya $x-5=0$

$x=2$ $\quad$ $x=5$ olur.

$x-3=0 \Rightarrow x=3$ olur.

x	$-\infty$	2		3		5	∞
$x^2-7x+10$	+	○	−		−	○	+
$x-3$	−		−	●	+		+
Ortak çözüm		○		●		○	

Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi, $Ç=[3,5)$ bulunur.

Örnek

$$\left.\begin{aligned} (x^2-4x)\cdot(1-x) &\geq 0 \\ -x^2+x+6 &< 0 \end{aligned}\right\}$$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$(x^2-4x)\cdot(1-x)=0$

$x^2-4x=0$ veya $1-x=0$

$x(x-4)=0$ $\quad$ $x=1$

$x=0$ veya $x-4=0$

$x=4$ olur.

$-x^2+x+6=0$

$(x+2)\cdot(-x+3)=0$

$x+2=0$ veya $-x+3=0$

$x=-2$ $\quad$ $-x=-3$

$x=3$ olur.

$(x^2-4x)\cdot(1-x)\geqslant 0$ eşitsizliği için her bir terimdeki en büyük dereceli terimlerin katsayılarının işaretleri çarpımı $(+)\cdot(-)=(-)$ olur. Bu eşitsizlik için işaret tablosunun en sağ hücresine $(-)$ yazılır.

x	$-\infty$		-2		0		1		3		4		∞
$(x^2-4x)\cdot(1-x)$		$+$		$+$	●	$-$	●	$+$		$+$	●	$-$	
$-x^2+x+6$		$-$	○	$+$		$+$		$+$	○	$-$		$-$	
Ortak çözüm			○		●		●		○		●		

Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi $Ç=(-\infty,-2)\cup(3,4]$ bulunur.

Örnek

$-8<x^2-6x<7$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini $\mathbb{Z}$ de bulalım.

Çözüm

$-8<x^2-6x<7$ eşitsizliğinin çözümü için

$$\left.\begin{array}{r}-8<x^2-6x\\ x^2-6x<7\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x^2-6x>-8\\ x^2-6x-7<0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x^2-6x+8>0\\ x^2-6x-7<0\end{array}\right\}$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulmalıyız.

$x^2-6x+8=0\Rightarrow(x-2)(x-4)=0\Rightarrow x-2=0$ veya $x-4=0$

$x=2$ $\qquad$ $x=4$ olur.

$x^2-6x-7=0\Rightarrow(x+1)(x-7)=0\Rightarrow x+1=0$ veya $x-7=0$

$x=-1$ $\qquad$ $x=7$ olur.

Bulduğumuz kökleri işaret tablosuna yerleştirip işaretlerini yazalım.

x	$-\infty$		-1		2		4		7		∞
x^2-6x+8		$+$		$+$	○	$-$	○	$+$		$+$	
x^2-6x-7		$+$	○	$-$		$-$		$-$	○	$+$	
Ortak çözüm			○		○		○		○		

Eşitsizlik sisteminin $\mathbb{Z}$ de çözüm kümesi $Ç=\{0,1,5,6\}$ bulunur.

Örnek

$$\left.\begin{aligned} \frac{(x-5)(x+4)}{x-1} &\geqslant 0 \\ \frac{x^2-3x}{x-3} &< 0 \end{aligned}\right\}$$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\frac{(x-5)(x+4)}{x-1} = 0$$

$x-5=0 \Rightarrow x=5,\ x+4=0 \Rightarrow x=-4,\ x-1=0 \Rightarrow x=1$ olur.

$$\frac{x^2-3x}{x-3} = 0$$

$x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow x=0$ ve $x-3=0 \Rightarrow x=3$ olur.

$x-3=0 \Rightarrow x=3$ olur. $x=3$'te çift kat kök vardır.

x	$-\infty$ … -4	-4 … 0	0 … 1	1 … 3	3 … 5	5 … ∞
$\frac{(x-5)(x+4)}{x-1}$	−	+	+	−	−	+
$\frac{x^2-3x}{x-3}$	−	−	+	+	+	+
Ortak çözüm		$[-4, 0)$				

Eşitsizliğin çözüm kümesi $[-4, 0)$ bulunur.

Alıştırmalar 4-3

1. $$\left.\begin{aligned} x^2-5x+6 &< 0 \\ x+1 &\geqslant 0 \end{aligned}\right\}$$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

2. $$\left.\begin{aligned} (x^2-9)\cdot(5-x) &> 0 \\ -x^2+x+2 &\leqslant 0 \end{aligned}\right\}$$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

3. $2 < x^2 - x \leqslant 6$ eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x tam sayı değeri vardır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

4. $$\left.\begin{aligned} x &< \frac{9}{x} \\ x^2-16 &\leqslant 0 \end{aligned}\right\}$$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

4. DEĞERLENDİRME SORULARI

1. $\left.\begin{aligned} x+y&=6 \\ x\cdot y&=8 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{(2,4),(4,2)\}$
B) $\{(-2,-4),(-4,-2)\}$
C) $\{(-2,2),(-4,4)\}$
D) $\{(2,6),(-2,-6)\}$
E) $\{(2,-2),(-6,6)\}$

2. $\left.\begin{aligned} x^2-y^2&=48 \\ x-y&=6 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{(7,1)\}$ B) $\{(1,7)\}$ C) $\{(-1,-7)\}$ D) $\{(-7,-1)\}$ E) $\{(7,1),(-7,-1)\}$

3. $\left.\begin{aligned} x^2-y^2+x+y&=20 \\ x-y&=3 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(3,2)$ B) $(4,1)$ C) $(-1,2)$ D) $(-3,-1)$ E) $(-2,-2)$

4. $\left.\begin{aligned} x-y&=2 \\ x^2+2x-5y&=10 \end{aligned}\right\}$ denklem sistemini sağlayan y gerçek sayılarının çarpımı kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

5. $m>0$ olmak üzere

$\left.\begin{aligned} x^2-mx+y+5&=0 \\ 2x-y-1&=0 \end{aligned}\right\}$ denklem sistemini sağlayan bir (x,y) sıralı ikilisi vardır. Buna göre m değeri kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

6. $\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=8 \\ x-y&=0 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminde $x+y$ değeri aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) -3 B) -2 C) 1 D) 4 E) 6

7. $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+5x-y+4=0 \\ x^2-y^2+3x+y+4=0 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{(-1,2),(-1,3)\}$
B) $\{(1,2)\}$
C) $\{(-4,1),(-4,4)\}$
D) $\{(-2,-1),(-2,2)\}$
E) $\{(2,3)\}$

8. $(3x-6) \geqslant (x-2)(x+5)$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, 1]$
B) $[-2, 2]$
C) $[0, 2]$
D) $[2, 3]$
E) $[3, \infty)$

9. $x^2+2mx-m+6=0$ denkleminin gerçek kökü yoksa m nin alabileceği kaç tam sayı değeri vardır?

A) 8
B) 6
C) 4
D) 2
E) 1

10. $(x-1)\cdot(x^2-x-6) > 0$ eşitsizliğini sağlayan en küçük tam sayı aşağıdakilerden hangisidir?

A) -3
B) -2
C) -1
D) 0
E) 1

11. $-\dfrac{x-2}{x^2+2x+1} > 0$ eşitsizliğini sağlayan en büyük negatif tam sayı aşağıdakilerden hangisidir?

A) -5
B) -4
C) -3
D) -2
E) -1

12. $x-12 < \dfrac{13}{x}$ eşitsizliğini sağlayan kaç tane x doğal sayısı vardır?

A) 12
B) 13
C) 14
D) 15
E) 16

13. $x\cdot(2-x)\cdot(x+1) \geqslant 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[1,3) \cup (5,\infty)$
B) $[-1,3]$
C) $(-\infty,-1] \cup [0,2]$
D) $[0,2)$
E) $(-\infty,-1)$

14. $0 < a < 1 < b < c$ olmak üzere $bx^2+ax+c > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (a,b)
B) (b,c)
C) (a,c)
D) $\varnothing$
E) $\mathbb{R}$

15. $\dfrac{2x^2+7x+6}{x^2+3x+2} \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-1,+\infty)$
B) $\left[-\dfrac{3}{2},-1\right)$
C) $\mathbb{R}-\{1,3\}$
D) $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$
E) $(-\infty,-2]$

16. $\dfrac{x^2-3x}{x^2-1} < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-1,0) \cup (1,3)$ B) $(-1,3) \cup \{1\}$ C) $(-1,3)$
D) $(3,5)$ E) $(1,5)$

17. Aşağıdaki noktalı yerlere uygun ifadeleri yazarak cümleleri tamamlayınız.

a) $x^2+10x+25 \leqslant 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi ....dir.

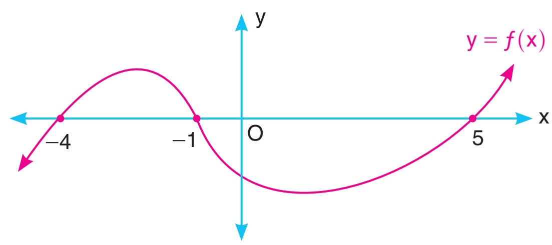
b) $\left.\begin{matrix} x^2-y=8 \\ x-y=2 \end{matrix}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesi .... elemanlıdır.

c) $\left.\begin{matrix} y-x^2=0 \\ y-4x+4=0 \end{matrix}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesi ....dir.

ç) $\dfrac{x^2+1}{x^4+1} > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi .... olur.

18. Yanda $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $\dfrac{(x^2-4)\cdot f(x)}{x-5} \leqslant 0$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaçtır?

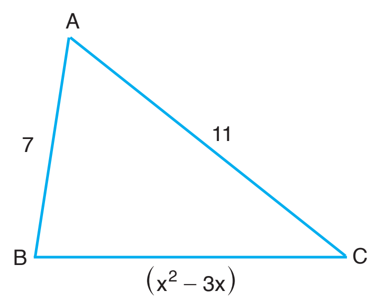


A) –5 B) –7 C) –8 D) –9 E) –10

19. $\left.\begin{matrix} x^2-x+4 > 0 \\ x^2-2x-3 < 0 \end{matrix}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\varnothing$ B) $(1,+\infty)$ C) $(-\infty,1)$ D) $(-1,10)$ E) $(-1,3)$

20. $x \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere bir ilin A, B ve C ilçeleri arasındaki uzaklıkları yandaki ABC üçgeni ile modellenmiştir.
$|AB| = 7$ km, $|AC| = 11$ km, $|BC| = (x-3x)$ km olduğuna göre B ve C ilçeleri arasındaki uzaklık kaç km'dir?



A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

Ölçme ve Değerlendirme Soruları

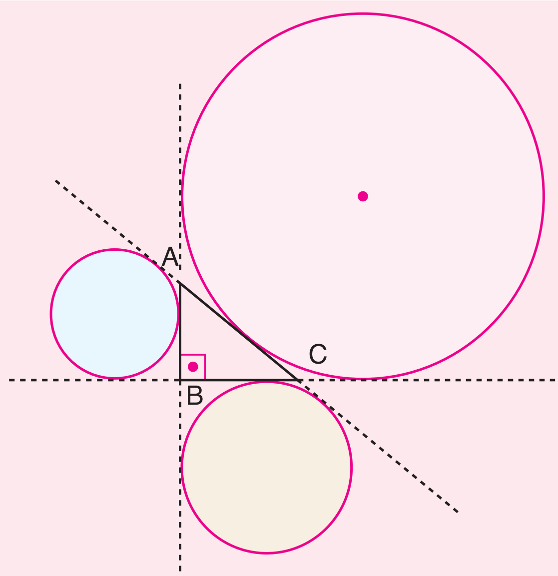
EBA

5

ÇEMBER VE DAİRE

Bu bölümde;

- Çemberde teğet, kiriş, çap, yay ve kesen kavramlarını,
- Çemberde kirişin özelliklerini göstererek işlemler yapmayı,
- Bir çemberde merkez, çevre, iç, dış ve teğet-kiriş açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapmayı,
- Çemberde teğetin özelliklerini göstererek işlemler yapmayı,
- Dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturmayı öğreneceksiniz.



Terimler ve Semboller

Terimler ve Kavramlar: çember, merkez, yarıçap, çap, kiriş, teğet, kesen, yay, merkez açı, çevre açı, teğet-kiriş açı, iç açı, dış açı, teğet, teğet parçası, yay uzunluğu, daire, daire dilimi

Sembol ve Gösterimler: $r, R, \overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{ABC}, m(\overset{\frown}{AB}), \pi$

5 Çember ve Daire

Hazırlık Çalışması

Yanda kareli kâğıtta verilen çembere göre aşağıdaki cümlelerin başındaki kutucuğa, ifade doğru ise “D”, yanlış ise “Y” yazınız.

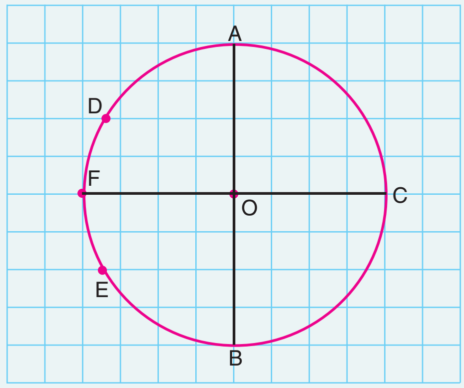
a) ☐ Çemberin yarıçapı [OC] dır.

b) ☐ $|OC| = |OF|$ dir.

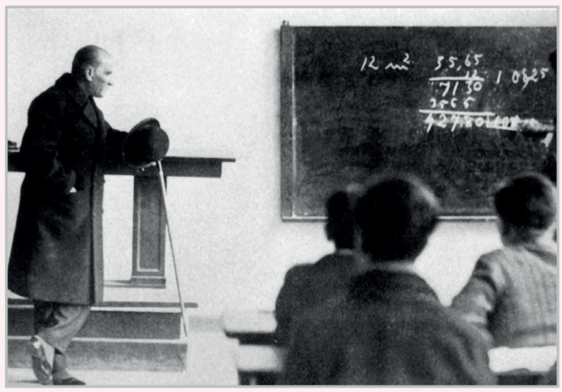
c) ☐ Çember üzerindeki A, B, C, D ve E noktaları çemberin merkezine eşit uzaklıktadır.

ç) ☐ Çemberin yarıçap uzunluğu 5 br’dir.

d) ☐ Çemberin çevre uzunluğu 8π br’dir.



Okuma Metni



Atatürk, Türk ulusu için her alanda yenilik ve çağdaşlığın yolunu açarken aynı zamanda bilimsel alanda da herkes tarafından bilinmeyen, oldukça faydalı bir çalışmaya imza atmıştır. Atatürk, 1936-1937 yıllarında küçük fakat işlevi ve önemi hacminden daha büyük denebilecek bir geometri kitabı yazmıştır.Yazdığı 44 sayfalık bu geometri kitabı ile geometri terimlerinin bugün kolay bir şekilde yazılıp anlaşılmasını sağlamıştır. Zira Atatürk’ün Dolmabahçe Sarayı’nda kendi el yazısı ile kaleme aldığı geometri kitabında matematiksel birçok terim geliştirilmiş, diğer taraftan bu kitap ile anlaşılması oldukça güç olan geometri terimlerine Türkçe karşılıklar bulunarak geometrinin öğrenilmesi güçlüğüne son verilmiştir.

1937 yılının Kasım ayında yeni bir eğitim ve öğretim yılına girilirken Mustafa Kemal Atatürk, Türk Dil Kurumunun çeşitli bilim dallarına ait Türkçe terimleri saptadığını, bu sayede dilimizin yabancı dillerin etkisinden kurtulma yolunda önemli adım attığını ilan eder. Aynı yıl içinde okullarda eğitim, Türkçe terimlerle basılan kitaplarla yapılmaya başlanmıştır. Bu olay kültür hayatımız için önemli bir adım olmuştur. Atatürk, bilim ve düşünce dilinin sadeleştirilmesinin ve eğitimin Türkçe yapılmasının gerekliliğini her yerde önemle vurgulamıştır. Atatürk’ün geometri kitabını yazmasındaki sebep:

Türkçeyi yabancı kelimelerden arındırarak anlaşılır bir dil hâline getirme çalışmalarına hizmet etmek, bilim dilinin de anlaşılır, öz bir Türkçe olmasını sağlamak, böylelikle Türkçeyi bir bilim dili hâline getirmektir.

Genel ağdan alınmıştır.

5.1. ÇEMBERİN TEMEL ELEMANLARI



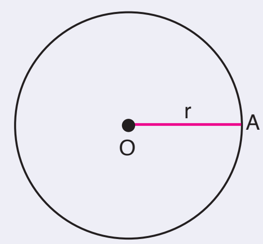
Pi sayısına günlük hayatımızda sıkça rastlar ve yaygın olarak kullanırız. Örneğin içi boş, çapı 10 santimetre olacak bir eşya yapacaksınız.

Bu eşyayı bir telden yapacağınızı kabul edelim, burada sizin ne kadar tele ihtiyacınız olacak bunu hesaplayabilmek için pi sayısını kullanmalısınız. Ayrıca açısal hız hesaplamalarında ve frekansların dalga boylarının hesaplanmasında,otomobil lastiklerinin çap hesabında, inşaat kolonlarının çaplarının hesaplanmasında pi sayısı kullanılmaktadır. Bu sayı aslında bir orandır ve dairenin çevresinin çapına bölümünden elde edilir. Bu oran 3, 1415926535... olarak bilinir. Bunu kendiniz de ölçebilirsiniz. Mesela evde herhangi bir dairesel cisim alırız. Cismin mümkün olduğunca büyük olmasına dikkat ediniz. Elinizde bir bardak var diyelim, eğer bir mezura ile bardağın önce çevresini daha sonra da çapını ölçüp bölerseniz her zaman pi sayısına ulaşırsınız. Tabii, sonucun aslına en yakın olması için hassas bir ölçüm yapmak gerekir.

5.1.1. Çemberlerde Teğet, Kiriş, Çap, Yay ve Kesen Kavramları

Çember

Bilgi



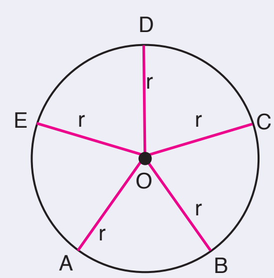
Düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıktaki noktalar kümesine **çember** denir.

Sabit nokta çemberin merkezidir. Merkez O veya M harfleriyle gösterilir.

Sabit uzaklık ise çemberin yarıçapı olarak adlandırılır ve r harfi ile gösterilir.

A çemberin üzerinde bir nokta olsun. O çemberin merkezi olmak üzere $|OA| = r$ dir.

Çember üzerindeki bütün noktalar merkeze eşit uzaklıktadır.

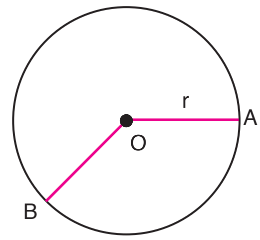


Yandaki çemberde O merkez; A, B, C, D ve E çemberin üzerindeki noktalar olmak üzere $|OA| = |OB| = |OC| = |OD| = |OE| = r$ dir.

Yarıçapı r, merkezi O olan çember Ç(O, r) biçiminde gösterilir.

Örnek

Şekilde O merkezli çember verilmiştir. A ve B noktaları çember üzerindedir. $|AO| = (2x + 1)$ br ve $|OB| = (4x - 5)$ br olduğuna göre x değerini bulalım.



Çözüm

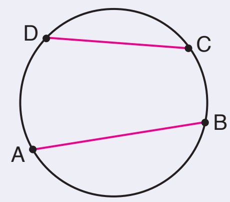
A ve B, çember üzerinde olduğundan merkeze eşit uzaklıktadır.

Buradan $|OB| = |OA|$ olur.

$$4x - 5 = 2x + 1 \Rightarrow 4x - 2x = 1 + 5 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3\text{'tür.}$$

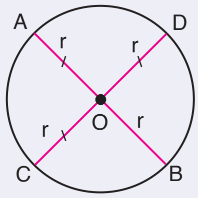
Bilgi

Çember üzerinde alınan iki noktayı birleştiren doğru parçasına **kiriş** denir. Yandaki çemberde [AB] ve [DC] kirişlerdir.



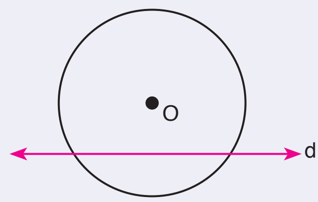
Çemberin merkezinden geçen kirişe **çap** denir. Çemberde en uzun kiriş, çaptır.

Yandaki çemberde [AB] ve [CD] kirişleri merkezden geçtiği için çemberin çapıdır. $|AB| = |DC| = 2r$ dir.



Bir çemberin herhangi iki noktasından geçen doğruya **kesen** adı verilir.

Yandaki çemberde d doğrusu, O merkezli çemberin kesenidir.

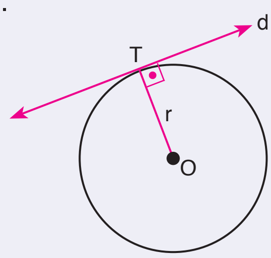


Çemberle ortak noktası yalnız bir tane olan doğruya **teğet** denir. Bu noktaya **değme noktası** da denir.

Yanda d doğrusu O merkezli çembere T noktasında teğettir.

Yarıçap, teğete değme noktasında diktir.

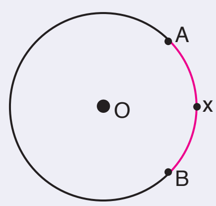
T değme noktası olduğundan $[OT] \perp d$ dir.



Çemberin üzerindeki farklı iki nokta arasında kalan çember parçasına **yay** denir.

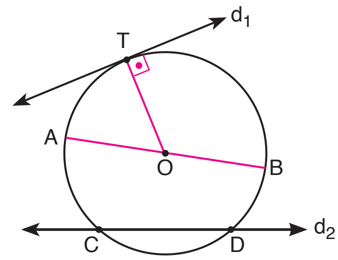
Yanda O merkezli çemberin bir yayı verilmiştir. Bu yay $\overset{\frown}{AxB}$ veya $\overset{\frown}{AB}$ biçiminde gösterilir.

Çemberde yarıçap ve merkez temel elemanlar; teğet, kiriş ve yay yardımcı elemanlardır.



Örnek

Yanda O merkezli çemberin temel ve yardımcı elemanlarını belirtelim.



Çözüm

O merkez; [OT], [OA] ve [OB] yarıçaptır. Bunlar temel elemanlardır.

d_1 doğrusu çembere T noktasında teğettir.

d_2 doğrusu, çemberin C ve D noktasından geçen kesenidir.

[AB] merkezden geçen kiriş, aynı zamanda merkezden geçtiği için de çaptır.

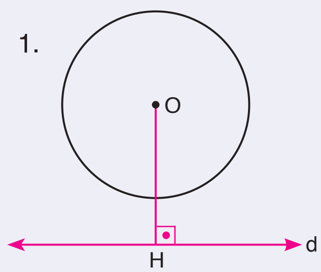
$\overset{\frown}{BT}$, $\overset{\frown}{AT}$, $\overset{\frown}{BD}$, $\overset{\frown}{AC}$ ve $\overset{\frown}{CD}$ yaylardır.

Bir Çember ile Doğrunun Birbirine Göre Durumları

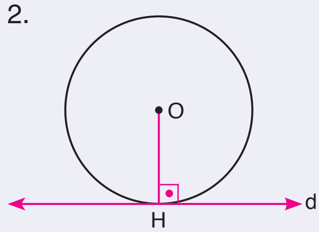
Bilgi

1. $[OH] \perp d$ ve $|OH| > r$ ise d doğrusu çemberi kesmez. $d \cap Ç(O,r) = \{\ \}$ olur.
2. $[OH] \perp d$ ve $|OH| = r$ ise d doğrusu çembere teğettir. $d \cap Ç(O,r) = \{H\}$ olur.
3. $[OH] \perp d$ ve $|OH| < r$ ise d doğrusu çemberi farklı iki noktada keser. $d \cap Ç(O,r) = \{A,B\}$ olur.

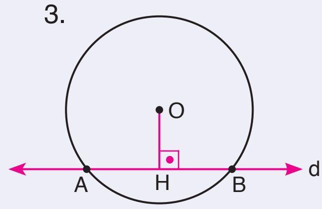
1.



2.



3.



Örnek

Bir çemberde x pozitif bir tam sayı olmak üzere yarıçap uzunluğu $(3x + 1)$ cm, merkezin bir d doğrusuna uzaklığı $(5x - 3)$ cm olarak veriliyor. d doğrusu ile çemberin ortak noktası olmadığına göre çemberin yarıçap uzunluğunun <u>en küçük</u> değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm

Çemberin yarıçap uzunluğu r, merkezinin d doğrusuna olan uzaklığı h olsun. Çemberin d doğrusu ile bir ortak noktası olmadığına göre $h > r$ olmalıdır.

$5x - 3 > 3x + 1 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2$

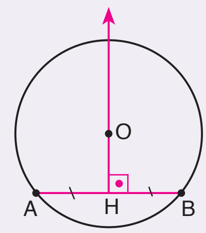
Yarıçap uzunluğunun değeri $3x + 1$'in en küçük olması için x en küçük olmalıdır.

x tam sayı olduğuna göre $x = 3$ olur. O hâlde çemberin yarıçap uzunluğunun en küçük değeri $r = 3x + 1 = 3 \cdot 3 = 10$ cm olur.

5.1.2. Çemberde Kirişin Özellikleri

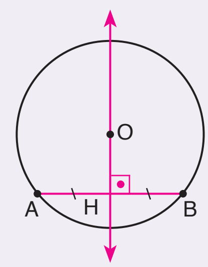
Özellik

Bir çemberde kirişin orta dikmesi çemberin merkezinden geçer.



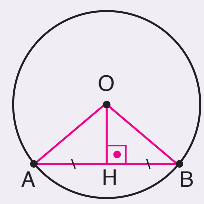
Bir çemberin merkezi ile bir kirişinin orta noktasını birleştiren doğru kirişe diktir. Bir başka ifadeyle çemberin merkezinden kirişe inilen dikme, kirişi ortalar.

O merkezli çemberde $[AB]$ kiriş ve $[OH] \perp [AB]$ ise $|AH| = |HB|$ veya $|AH| = |HB|$ ise $[OH] \perp [AB]$ dir.



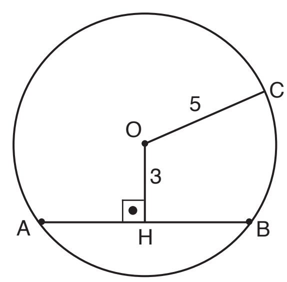
İspat

O noktası A ve B noktaları ile birleştirilirse $[OA]$ ve $[OB]$ yarıçap olur. $|OA| = |OB|$ olduğundan OAB üçgeni ikizkenar üçgen olur. İkizkenar üçgende tabana inilen dikme yükseklik olup tabanı iki eş parçaya ayırır. Buradan $[AB]$ kirişinin orta dikmesi O noktasından geçer.



Örnek

O merkezli çemberde $[OC]$ yarıçap, $[AB]$ kiriş, $[OH] \perp [AB]$, $|OC| = 5$ cm, $|OH| = 3$ cm olduğuna göre $|AB|$ nun kaç cm olduğunu bulalım.



Çözüm

$|OC| = 5$ cm çemberin yarıçapıdır.

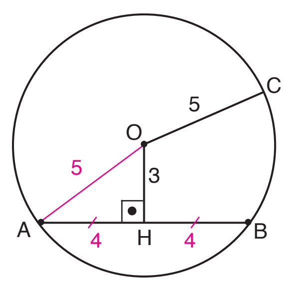
$[OA]$ nı çizelim. $|OC| = |OA| = 5$ cm olur.

$[OH] \perp [AB]$ olduğundan $[OH]$, $[AB]$ kirişini ortalar.

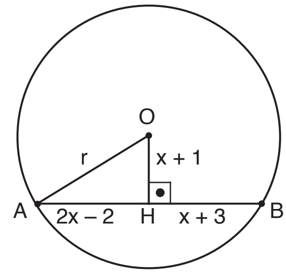
$\widehat{AHO}$ dik üçgendir.

Buradan $|AH| = 4$ cm olur (3 – 4 – 5 özel üçgeni).

$|AH| = |HB| = 4$ cm olduğundan $|AB| = 8$ cm bulunur.



Örnek



O merkezli çemberde [AB] kiriş, [OH] ⊥ [AB],

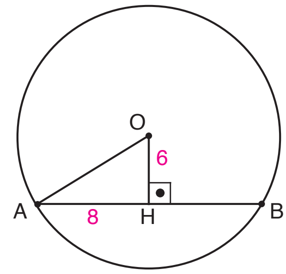
$|AH| = (2x - 2)$ cm,

$|HB| = (x + 3)$ cm,

$|OH| = (x + 1)$ cm olduğuna göre

$|OA| = r$ nin kaç cm olduğunu bulalım.

Çözüm



$[OH] \perp [AB]$ olduğundan $|AH| = |HB|$ olur.

$2x - 2 = x + 3$

$x = 5$ olur. $|AH| = 2x - 2 = 2 \cdot 5 - 2 = 8$ cm

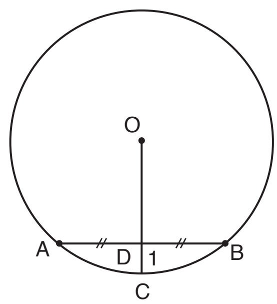
$|OH| = x + 1 = 5 + 1 = 6$ cm olur.

AHO dik üçgeninde Pisagor teoremini uygularsak

$$|AO|^2 = |OH|^2 + |AH|^2$$
$$= 6^2 + 8^2$$
$$|AO|^2 = 36 + 64$$
$$= 100$$

$|AO| = r = 10$ cm olur.

Örnek



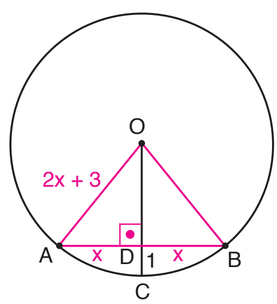
O merkezli çemberde [AB] kiriş,

$|AD| = |DB|$, $|DC| = 1$ cm,

$|OD| = (2|AD| + 2)$ cm olduğuna göre

$|AB|$ nun kaç cm olduğunu bulalım.

Çözüm



O merkezli çemberde $|AD| = |DB|$ olduğundan $[OC] \perp [AB]$ olur.

$|AD| = x$ dersek $|OD| = 2x + 2$ olur.

[OA] yarıçapını çizelim. $|OA| = |OC| = 2x + 3$ olur.

AOD dik üçgeninde Pisagor teoremini uygularsak

$|AO|^2 = |AD|^2 + |OD|^2$

$(2x + 3)^2 = x^2 + (2x + 2)^2$

$4x^2 + 12x + 9 = x^2 + 4x^2 + 8x + 4$

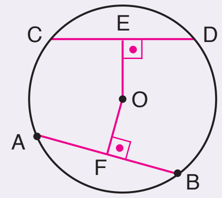
$x^2 - 4x - 5 = (x - 5) \cdot (x + 1) = 0$ ise $x - 5 = 0$ veya $x + 1 = 0$'dır.

$x = -1$ için $2x + 2 = 2 \cdot (-1) + 2 = 0$ olduğundan $x = -1$ olamaz. O hâlde $x = 5$'tir. Buradan

$|AB| = 2x = 2 \cdot 5 = 10$ cm bulunur.

Özellik

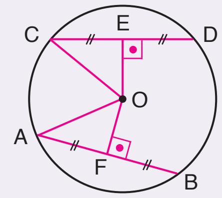
a) Bir çemberde eş kirişlerin merkeze uzaklıkları eşittir.



O merkez

$|AB| = |CD|$ ise $|OE| = |OF|$ olur.

İspat



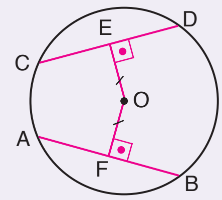
$|AB| = |DC|$ olduğundan

$|AF| = |EC|$ (Merkezden kirişe inilen dikme, kirişi ortalar.)

$|OA| = |OC| = r$, $m(\widehat{OFA}) = m(\widehat{OEC})$ olduğundan

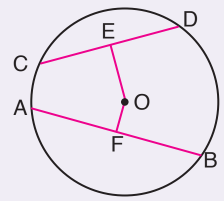
$\widehat{OFA} \cong \widehat{OEC}$ ise $|OF| = |OE|$ bulunur.

b) Bir çemberde merkeze eşit uzaklıktaki kirişlerin uzunlukları eşittir. O merkezli çemberde $|OF| = |OE|$ ise $|AB| = |CD|$ olur.



c) Bir çemberde merkeze daha yakın kiriş daha uzundur.

$|OF| < |OE|$ ise $|AB| > |CD|$ olur.



Örnek

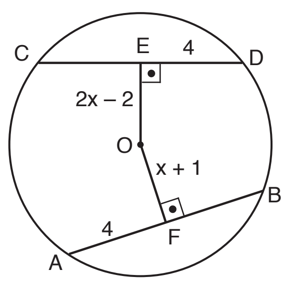
O merkezli çemberde $[AB]$ ve $[CD]$ kiriş,

$[OE] \perp [CD]$, $[OF] \perp [AB]$,

$|ED| = |AF| = 4$ cm,

$|OE| = (2x - 2)$ cm,

$|OF| = (x + 1)$ cm olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğunu bulalım.



Çözüm

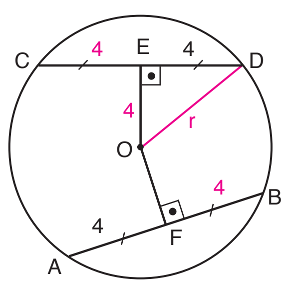
O merkezli çemberde $[OE] \perp [CD]$ olduğundan

$|ED| = |EC| = 4$ cm $\Rightarrow |DC| = 8$ cm olur.

$[OF] \perp [AB]$ olduğundan $|AF| = |FB| = 4$ cm ise

$|AB| = 8$ cm olur. O hâlde $|AB| = |DC|$ olur.

Eşit uzunluktaki kirişlerin merkeze uzaklıkları da eşit olduğundan $|OE| = |OF|$ olur. Buradan $2x - 2 = x + 1 \Rightarrow x = 3$ bulunur.



O hâlde $|OE| = |OF| = 4$ cm olur.

$[OD]$ yarıçapı çizelim. OED dik üçgeninde Pisagor teoremini uygulayalım.

$|OD|^2 = |OE|^2 + |ED|^2$

$r^2 = 4^2 + 4^2$

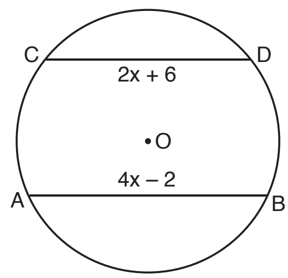
$r^2 = 16 + 16$

$r^2 = 32$

$r = 4\sqrt{2}$ cm bulunur.

Örnek

O merkezli çemberde, $[AB]$ ve $[CD]$ kiriş,
$[AB]$ kirişi merkeze daha yakındır.
$|AB| = (4x - 2)$ cm,
$|CD| = (2x + 6)$ cm olduğuna göre
x in alabileceği en küçük tam sayı değerini bulalım.



Çözüm

O merkezli çemberde $[AB]$ kirişi, merkeze daha yakın olduğundan daha uzundur. Öyleyse

$|CD| < |AB|$

$2x + 6 < 4x - 2$

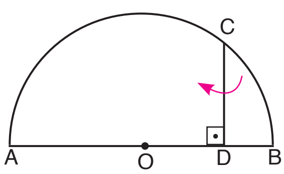
$6 + 2 < 4x - 2x$

$8 < 2x$

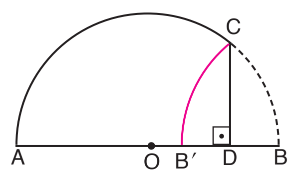
$4 < x \Rightarrow x > 4$ olur. Buradan x in alabileceği en küçük tam sayı değeri 5 bulunur.

Alıştırmalar 5-1

1. Kâğıt üzerine O merkezli yarım bir çember çiziliyor ve makasla kesilerek çıkarılıyor. Bu yarım çember (1. Şekil) $[CD]$ boyunca katlandığında B noktası çap üzerindeki B' noktasına gelmektedir (2. Şekil).
$[CD]$ kiriş, $[AB] \perp [CD]$, $|AB| = 6$ cm,
$|B'D| = 1$ cm olduğuna göre $|CD|$ kaç cm'dir?

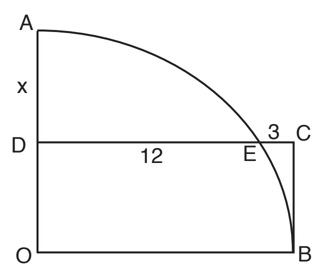


1. Şekil



2. Şekil

2. Yanda O merkezli çeyrek çember ve OBCD dikdörtgendir. $D \in [OA]$, $|DE| = 12$ cm,
$|EC| = 3$ cm olduğuna göre
$|AD| = x$ kaç cm'dir?

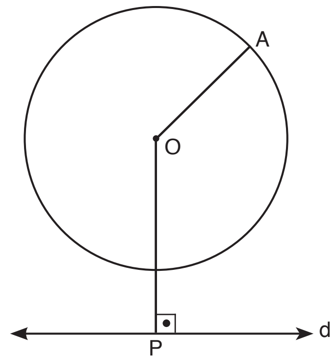


3. O merkezli çemberde A noktası çember üzerinde

$|OA| = (3x - 5)$ cm, $[OP] \perp d$,

$|OP| = (4x - 9)$ cm olduğuna göre

x in alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

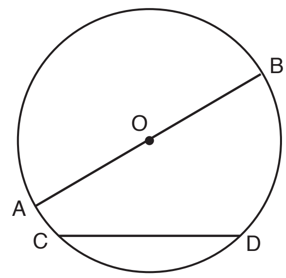


4. O merkezli çemberde $[AB]$ çap,

$|AB| = 12$ cm,

$|CD| = 8$ cm olduğuna göre

$[CD]$ kirişinin merkeze uzaklığını bulunuz.



5. O merkezli çemberde $[AB]$ çap,

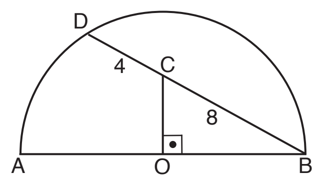
D noktası çember üzerinde, $C \in [DB]$,

$[CO] \perp [AB]$,

$|DC| = 4$ cm,

$|BC| = 8$ cm olduğuna göre

çemberin çapının uzunluğu kaç cm'dir?



6. O merkezli çemberde $[OE] \perp [CD]$, $[OF] \perp [AB]$,

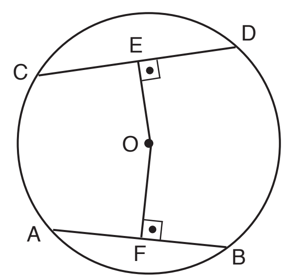
$|OE| = (5x - 2)$ cm, $|OF| = (2x + 16)$ cm ve

$[CD]$ kirişi merkeze $[AB]$ kirişinden daha yakın olduğuna göre

x değeri aşağıdakilerden hangisi <u>olamaz</u>?

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6



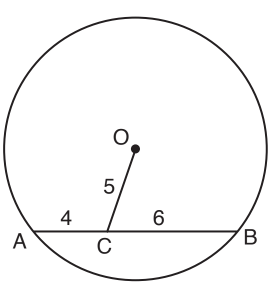
7. O merkezli çemberde $[AB]$ kiriş, $|AC| = 4$ cm,

$|CB| = 6$ cm, $|OC| = 5$ cm olduğuna göre

çemberin yarıçap uzunluğu kaç cm'dir?

A) 6 B) 7 C) 8

D) 9 E) 10



5.2. ÇEMBERDE AÇILAR

5.2.1. Çemberde Merkez, Çevre, İç, Dış ve Teğet-Kiriş Açılar

Merkez Açı

Bilgi

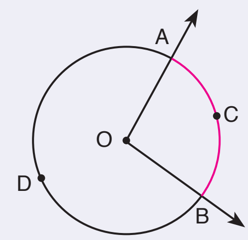
Köşesi çemberin merkezinde ve kenarları çemberi kesen açıya **merkez açı** denir.

AOB merkez açısının kollarının ayırdığı ACB yayına **merkez açının gördüğü yay** denir.

Merkez açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsüne eşittir.

O merkezli çemberde ACB yayı küçük yay, ADB büyük yaydır.

Aksi söylenmedikçe bundan sonra $\overset{\frown}{AB}$ denilince küçük yay anlaşılacaktır.

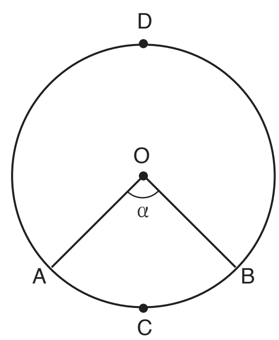


Örnek

O merkezli çemberde

$7m(\overset{\frown}{ACB}) = 2m(\overset{\frown}{ADB})$ olduğuna göre

$m(\widehat{AOB}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulalım.



Çözüm

$7m(\overset{\frown}{ACB}) = 2m(\overset{\frown}{ADB})$ ise $m(\overset{\frown}{ADB}) = 7k$, $m(\overset{\frown}{ACB}) = 2k$ diyelim.

O hâlde çemberin tamamı 9k olur.

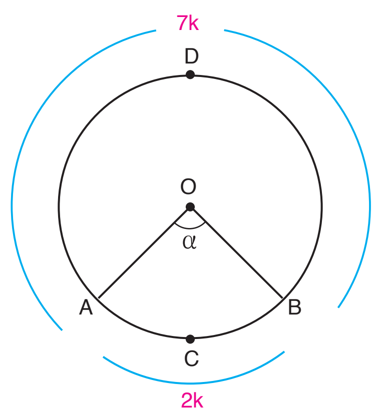
Çemberin tamamı 360° lik açı belirttiğinden

$9k = 360°$

$k = 40°$dir.

$m(\overset{\frown}{ACB}) = 2k = 2 \cdot 40° = 80°$dir.

AOB merkez açı olduğundan ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsüne eşittir. O hâlde $m(\widehat{AOB}) = m(\overset{\frown}{ACB}) = 80°$ bulunur.



Hatırlatma

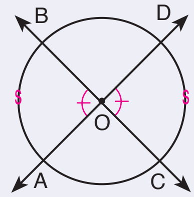
Bir çemberde yarım çemberi gören merkez açının ölçüsü 180°dir ve bu açıya **doğru açı** denir. Çemberin tamamını gören merkez açının ölçüsü 360°dir ve bu açıya **tam açı** denir.

Bilgi

Bir çemberde ölçüleri eşit yaylara **eş yaylar** denir.

O merkezli çemberde $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$ olur.

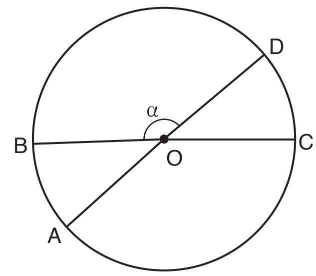
O hâlde $m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{CD})$ ise $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{COD})$ olur.



İki merkez açı eş ise bu açıların gördüğü yaylar da eştir.

Örnek

O merkezli çemberde $m(\overset{\frown}{AB}) = 2x$ ve $m(\overset{\frown}{CD}) = x + 20°$ olduğuna göre $m(\widehat{BOD}) = \alpha$ nın kaç derece oldğunu bulalım.



Çözüm

O merkezli çemberde, $m(\widehat{DOC}) = m(\widehat{AOB})$ olur (ters açılar).

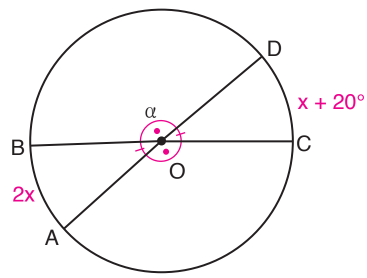
$\widehat{DOC}$ ve $\widehat{AOB}$ merkez açı olduğundan ölçüleri gördükleri yayın ölçüsüne eşittir. Buradan

$m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{CD})$ olur. O hâlde, $2x = x + 20° \Rightarrow x = 20°$ olur.

$m(\overset{\frown}{AB}) = 40°$ olur. Buradan $m(\widehat{AOB}) = 40°$ olur.

$m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOD}) = 180°$dir (bütünler açılar).

$40° + \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 140°$ bulunur.



Özellik

Bir çemberde eş kirişlerin uç noktaları arasında kalan yaylar da eştir. $[AB] \cong [CD] \Rightarrow \overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{DC}$ olur.

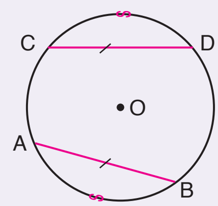
İspat

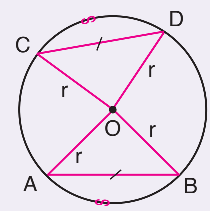
$|OA| = |OB| = |OC| = |OD| = r$ ve $|AB| = |CD|$ olur.

O hâlde $\widehat{AOB} \cong \widehat{COD}$ olur (K.K.K eşlik kuralı).

Buradan $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{COD})$ ise

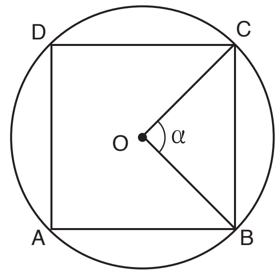
$m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{CD})$ olur (Merkez açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsüne eşittir.) yani $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$ bulunur.





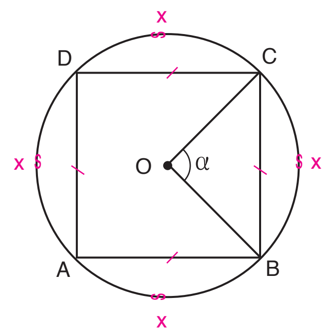
Ölçüleri eşit yayların kiriş uzunlukları da eşittir.

Örnek



Köşeleri, O merkezli çemberin üzeride olan ABCD karesi çizilmiştir. $m(\widehat{BOC}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



ABCD kare olduğundan kenar uzunlukları birbirine eşittir.

Eş kirişler çemberde eş yaylar ayırır. Her bir yayın ölçüsüne x dersek

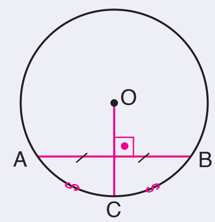
$4x = 360°$ (Çemberin tamamı 360°dir.)

$x = 90°$ olur.

$\widehat{BOC}$ merkez açı olduğundan ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsüne eşittir.

O hâlde $m(\widehat{BOC}) = \alpha = x = 90°$ bulunur.

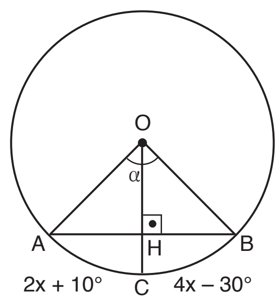
Bilgi



Bir çemberin merkezinden kirişine inilen dikme, kirişin uç noktaları arasında kalan yayı ortalar.

O merkezli çemberde $[OC] \perp [AB]$ ise $m(\overset{\frown}{AC}) = m(\overset{\frown}{CB})$ olur.

Örnek



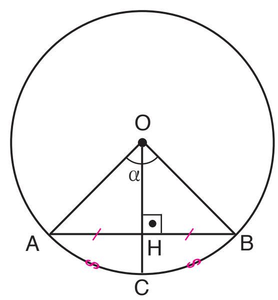
O merkezli çemberde $[AB]$ kiriş, $[OC] \perp [AB]$,

$m(\overset{\frown}{AC}) = 2x + 10°$,

$m(\overset{\frown}{CB}) = 4x - 30°$ olduğuna göre

$m(\widehat{AOB}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



O merkezli çemberde $[OC] \perp [AB]$ olduğundan $|AH| = |HB|$ ve $m(\overset{\frown}{AC}) = m(\overset{\frown}{CB})$ olur.

Buradan $4x - 30° = 2x + 10°$

$4x - 2x = 10° + 30°$

$2x = 40°$

$x = 20°$ bulunur.

$\widehat{AOB}$ merkez açı olduğundan ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsüne eşittir.

$m(\widehat{AOB}) = \alpha = m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{CB}) = 2x + 10° + 4x - 30° = 6x - 20 = 6 \cdot 20° - 20° = 100°$ olur.

Özellik

Bir çemberde paralel iki kiriş arasında kalan yayların ölçüleri birbirine eşittir.

İspat

O merkezli çemberde [AB]//[CD] verilsin.

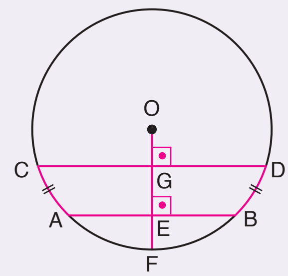
$[OF] \perp [CD]$ ve $[OF] \perp [AB]$ olacak şekilde [OF] çizilirse

$m(\overset{\frown}{AF}) = m(\overset{\frown}{BF})$ ve $m(\overset{\frown}{CF}) = m(\overset{\frown}{FD})$ olur.

$m(\overset{\frown}{AC}) = m(\overset{\frown}{CF}) - (\overset{\frown}{AF})$, $m(\overset{\frown}{BD}) = m(\overset{\frown}{FD}) - m(\overset{\frown}{BF})$ olur.

$m(\overset{\frown}{CF}) = m(\overset{\frown}{FD})$ ve $m(\overset{\frown}{AF}) = m(\overset{\frown}{BF})$ olduğundan

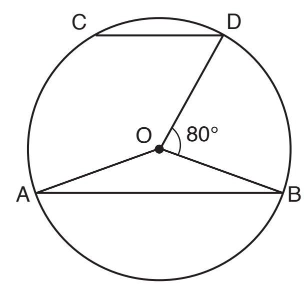
$m(\overset{\frown}{BD}) = m(\overset{\frown}{CF}) - m(\overset{\frown}{AF})$ bulunur. Buradan $m(\overset{\frown}{AC}) = m(\overset{\frown}{BD})$ olur.



Örnek

O merkezli çemberde, [DC]//[AB], $m(\widehat{BOD}) = 80°$,

$m(\overset{\frown}{AB}) = 4m(\overset{\frown}{CD})$ olduğuna göre $m(\widehat{AOB})$ nin kaç derece olduğunu bulalım.



Çözüm

O merkezli çemberde, [DC]//[AB] olduğundan $m(\overset{\frown}{BD}) = m(\overset{\frown}{AC})$ dır. (Paralel kirişler arasında kalan yayların ölçüsü eşittir.)

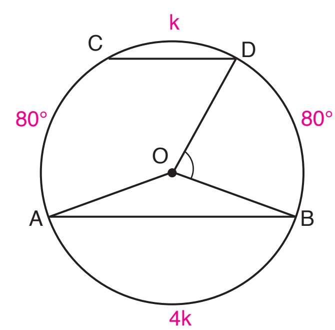
BOD merkez açısı, gördüğü yayın ölçüsüne eşit olduğundan $m(\overset{\frown}{BD}) = m(\overset{\frown}{AC}) = 80°$ olur.

$m(\overset{\frown}{AB}) = 4m(\overset{\frown}{CD})$ ise $m(\overset{\frown}{CD}) = k$ dersek

$m(\overset{\frown}{AB}) = 4k$ olur. Çemberin tamamı 360° olduğundan

$$4k + k + 80° + 80° = 360°$$
$$5k + 160° = 360°$$
$$5k = 200°$$
$$k = 40°$$ olur. $\widehat{AOB}$ merkez açı olduğundan

$m(\widehat{AOB}) = m(\overset{\frown}{AB}) = 4k = 4 \cdot 40° = 160°$ bulunur.



Çevre Açı

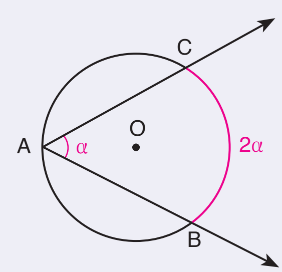
Bilgi

Köşesi çember üzerinde olan ve kenarları çemberi kesen açıya **çevre açı** denir.

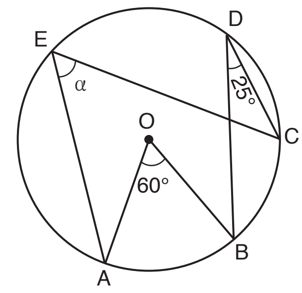
Yandaki çemberde $\widehat{BAC}$ çevre açıdır.

Çevre açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir.

$m(\overset{\frown}{BC}) = 2\alpha$ olmak üzere $m(\widehat{BAC}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC})}{2} = \dfrac{2\alpha}{2} = \alpha$ olur.



Örnek



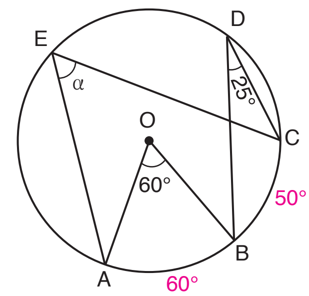
O merkezli çemberde, A, B, C, D ve E noktaları çember üzerinde,

$m(\widehat{AOB}) = 60°$,

$m(\widehat{BDC}) = 25°$ olduğuna göre

$m(\widehat{AEC}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



O merkezli çemberde $\widehat{AOB}$ merkez açı olduğundan ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsüne eşittir. Buradan

$m(\widehat{AOB}) = m(\overset{\frown}{AB}) = 60°$ olur.

$\widehat{BDC}$ çevre açı olduğundan ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir.

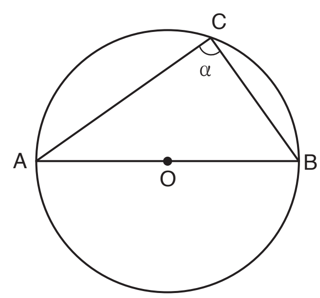
O hâlde $m(\widehat{BDC}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC})}{2} \Rightarrow 25° = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC})}{2}$

$m(\overset{\frown}{BC}) = 50°$ olur.

$\widehat{AEC}$ çevre açı olduğundan ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir.

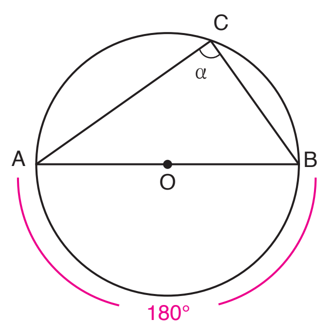
Buradan $m(\widehat{AEC}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AC})}{2} = \dfrac{50° + 60°}{2} = \dfrac{110°}{2} = 55°$ bulunur.

Örnek



O merkezli çemberde, C noktası çember üzerinde ve $[AB]$ çap olduğuna göre $m(\widehat{ACB}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



O merkezli çemberde $[AB]$ çap olduğundan çemberi iki eş yaya ayırır ve bu yayların ölçüsü 180°dir.

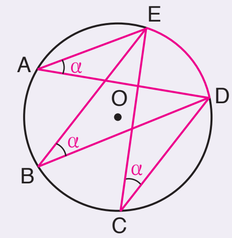
$\widehat{ACB}$ çevre açı olduğundan gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir.

$m(\widehat{ACB}) = \alpha = \dfrac{180°}{2} = 90°$ bulunur.

Özellik

1. Aynı yayı gören çevre açıların ölçüleri birbirine eşittir.

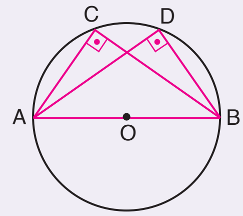
$m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{DCE}) = \alpha$ olur.



2. Çapı gören çevre açının ölçüsü 90°dir.

[AB] çap olmak üzere

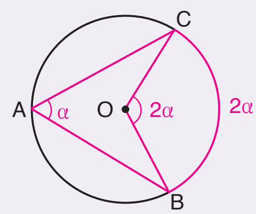
$m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ADB}) = 90°$ olur.



3. Bir çemberde çevre açının ölçüsü, aynı yayı gören merkez açının ölçüsünün yarısına eşittir.

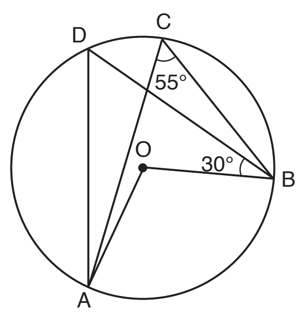
O merkezli çemberde

$m(\widehat{BAC}) = \dfrac{m(\widehat{BOC})}{2}$ olur.

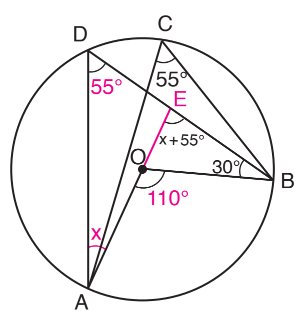


Örnek

O merkezli çemberde, A, B, C ve D noktaları çember üzerinde $m(\widehat{ACB}) = 55°$, $m(\widehat{OBD}) = 30°$ olduğuna göre $m(\widehat{OAD})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.



Çözüm



ADB ve ACB çevre açıları aynı yayı gördüğünden

$m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{ACB}) = 55°$ olur.

$\widehat{AOB}$ merkez açı ile $\widehat{ADB}$ çevre açı aynı yayı gördüğünden

$m(\widehat{ADB}) = \dfrac{m(\widehat{AOB})}{2} = 55°$ ise $m(\widehat{AOB}) = 110°$ olur.

[AO] nı uzatalım ve $m(\widehat{OAD}) = x$ diyelim.

$\widehat{ADE}$ nde $m(\widehat{DAE}) + m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{OEB})$ olacağından

$m(\widehat{OEB}) = x + 55°$dir.

$\widehat{OEB}$ nde $m(\widehat{OEB}) + m(\widehat{EBO}) = m(\widehat{AOB})$ olduğundan

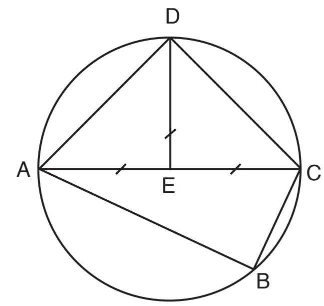
$$x + 55° + 30° = 110°$$
$$x + 85° = 110°$$
$$x = 25° \text{ bulunur.}$$

E-İçerik

Örnek

Yandaki çemberde, B ve D noktaları çember üzerinde, $[AC]$ çap, A, E, C doğrusal;

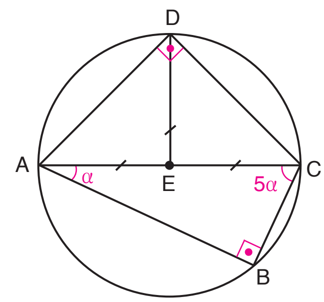
$|AE| = |ED| = |EC|$, $m(\widehat{ACB}) = 5m(\widehat{BAC})$ olduğuna göre $m(\widehat{BAC})$ nın kaç derece olduğunu bulalım.



Çözüm

A, E, C doğrusal ve $|AE| = |EC| = |ED|$ olduğundan

$m(\widehat{ADC}) = 90°$ olur. (Dik üçgenin hipotenüse ait kenarortayı, ayırdığı parçalara eşittir.) O hâlde $[AC]$ çaptır. Çapı gören çevre açının ölçüsü 90° olduğundan $m(\widehat{ABC}) = 90°$dir.



$m(\widehat{ACB}) = 5m(\widehat{BAC})$ olduğundan

$m(\widehat{BAC}) = \alpha$ dersek $m(\widehat{ACB}) = 5\alpha$ olur.

ABC dik üçgeninde iç açılarının ölçüleri toplamını yazalım.

$\alpha + 5\alpha + 90° = 180°$

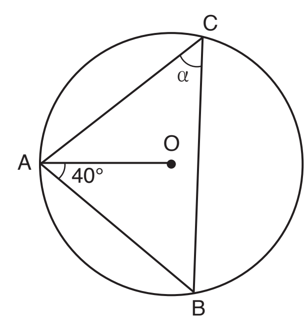
$6\alpha = 90°$

$\alpha = 15°$ olur.

$m(\widehat{BAC}) = \alpha = 15°$ bulunur.

Örnek

O merkezli çemberde $[BC]$ kiriş, A noktası çember üzerinde, $m(\widehat{OAB}) = 40°$ olduğuna göre $m(\widehat{ACB}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulalım.



Çözüm

$[OB]$ çizilirse $|AO| = |OB| = r$ olacağından AOB ikizkenar üçgen olur. Buradan $m(\widehat{OAB}) = m(\widehat{OBA}) = 40°$dir.

AOB üçgeninde iç açılarının ölçüleri toplamı yazılırsa

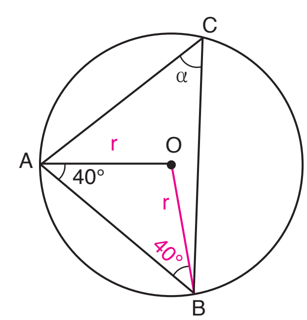
$m(\widehat{OAB}) + m(\widehat{OBA}) + m(\widehat{AOB}) = 180°$

$40° + 40° + m(\widehat{AOB}) = 180°$

$m(\widehat{AOB}) = 100°$ olur.

AOB merkez açısı ile ACB çevre açıları aynı yayı gördüğünden

$m(\widehat{ACB}) = \alpha = \dfrac{m(\widehat{AOB})}{2} = \dfrac{100°}{2} = 50°$ bulunur.



Teğet - Kiriş Açı

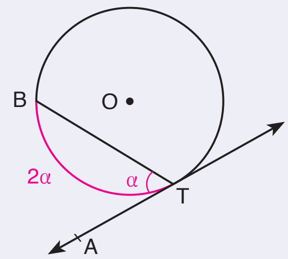
Bilgi

Köşesi çemberin üzerinde bulunan ve kenarlarından biri çemberin teğeti, diğeri kirişi olan açıya **teğet-kiriş açı** denir.

O merkezli çemberde, T teğetin değme noktası ve [TB] kiriş olmak üzere $\widehat{ATB}$ teğet-kiriş açıdır.

Teğet-kiriş açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir. $m(\overset{\frown}{BT}) = 2\alpha$ olmak üzere

$$m(\widehat{ATB}) = \frac{m(\overset{\frown}{BT})}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha \text{ dır.}$$

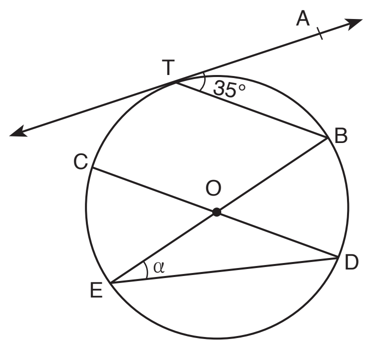


Örnek

O merkezli çemberde, AT doğrusu çembere T noktasında teğet, [CD] ve [EB] çaptır.

$m(\widehat{ATB}) = 35°$, [TB]//[CD] olduğuna göre

$m(\widehat{BED}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulalım.



Çözüm

ATB açısı teğet-kiriş açı olduğundan $m(\overset{\frown}{BT}) = 70°$dir.

$m(\widehat{BED}) = \alpha$ açısı çevre açı ve [TB]//[CD] olduğundan

$m(\overset{\frown}{TC}) = m(\overset{\frown}{BD}) = 2\alpha$ dır.

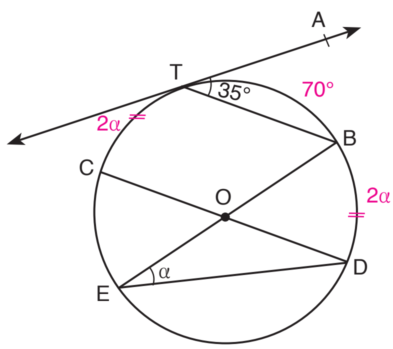
[CD] çap olduğundan

$m(\overset{\frown}{TC}) + m(\overset{\frown}{BD}) + m(\overset{\frown}{TB}) = 180°$

$2\alpha + 2\alpha + 70 = 180°$

$4\alpha = 110°$

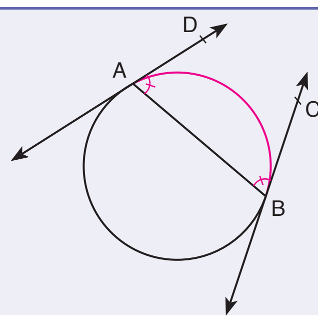
$\alpha = 27,5°$ bulunur.



Bilgi

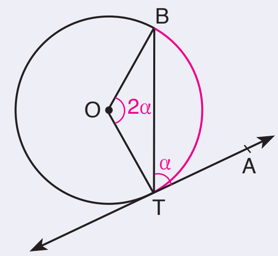
1. Aynı yayı gören teğet-kiriş açıların ölçüleri birbirine eşittir.

Yandaki çemberde A ve B teğetlerin değme noktaları olmak üzere $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{ABC})$ olur.



2. Teğet-kiriş açının ölçüsü, aynı yayı gören merkez açının ölçüsünün yarısına eşittir.

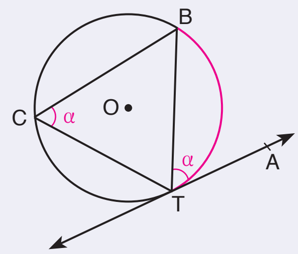
O merkezli çemberde $\widehat{BOT}$ merkez açı, $\widehat{ATB}$ teğet-kiriş açı olmak üzere $m(\widehat{ATB}) = \frac{m(\widehat{BOT})}{2}$ olur.



3. Aynı yayı gören çevre açı ile teğet-kiriş açının ölçüleri birbirine eşittir.

Yandaki çemberde $\widehat{TCB}$ çevre açı, $\widehat{ATB}$ teğet-kiriş açı olmak üzere

$m(\widehat{ATB}) = m(\widehat{TCB})$ olur.

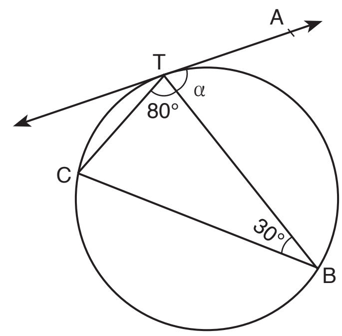


Örnek

Yandaki çemberde AT doğrusu çembere T noktasında teğet,

B ve C noktaları çember üzerindedir.

$m(\widehat{CTB}) = 80°$, $m(\widehat{TBC}) = 30°$ olduğuna göre $m(\widehat{ATB}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulalım.



Çözüm

$\widehat{TCB}$ nde iç açılarının ölçüleri toplamını yazalım.

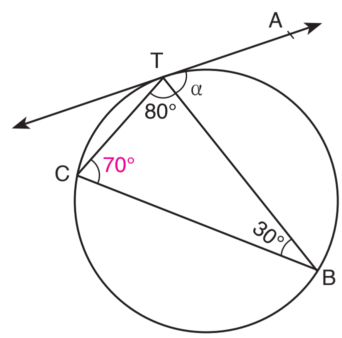
$m(\widehat{CTB}) + m(\widehat{TBC}) + m(TCB) = 180°$

$80° + 30° + m(\widehat{TCB}) = 180°$

$m(\widehat{TCB}) = 70°$ olur.

ATB teğet-kiriş açısı ve TCB çevre açısı, aynı yayı gördüğünden ölçüleri birbirine eşittir.

$m(\widehat{TCB}) = m(\widehat{ATB}) = \alpha = 70°$ bulunur.



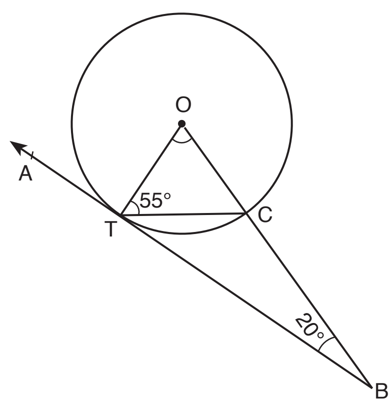
Örnek

[BA, O merkezli çembere T noktasında teğet,

C noktası çember üzerindedir.

$m(\widehat{TBO}) = 20°$, $m(\widehat{OTC}) = 55°$ olduğuna göre

$m(\widehat{CTB})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.



Çözüm

$\widehat{TOC}$ merkez açı, $\widehat{CTB}$ teğet-kiriş açı olduğundan

$m(\widehat{TOC}) = 2m(\widehat{CTB})$ olur.

$m(\widehat{CTB}) = \alpha$ dersek $m(\widehat{TOC}) = 2\alpha$ olur.

$m(\widehat{TCO}) = m(\widehat{CTB}) + m(\widehat{TBC})$

$m(\widehat{TCO}) = \alpha + 20°$ olur.

$\widehat{OTC}$ nde iç açılarının ölçüleri toplamını yazalım.

$m(\widehat{TOC}) + m(\widehat{TCO}) + m(\widehat{OTC}) = 180°$

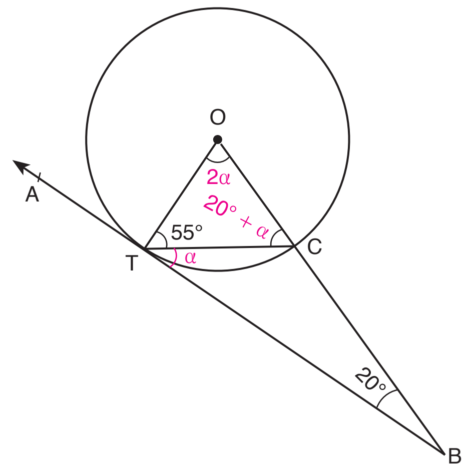
$2\alpha + \alpha + 20° + 55° = 180°$

$3\alpha + 75° = 180°$

$3\alpha = 105°$

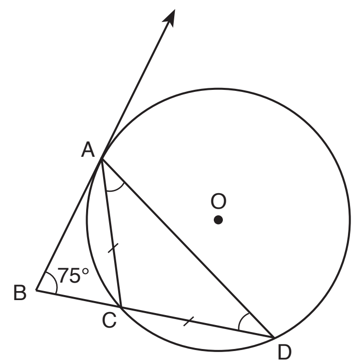
$\alpha = 35°$ olur.

$m(\widehat{CTB}) = 35°$dir.



Örnek

Yandaki çemberde [BA, A noktasında çembere teğet, D ve C noktaları çember üzerindedir. ABD üçgen; $|AC| = |CD|$, $m(\widehat{ABC}) = 75°$ ise $m(\widehat{BAD})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.



Çözüm

$|AC| = |CD|$ olduğundan ACB ikizkenar üçgendir.

$m(\widehat{CDA}) = m(\widehat{CAD}) = \alpha$ diyelim.

BAC teğet-kiriş açı ile BDA çevre açısı aynı yayı gördüğünden $m(\widehat{BDA}) = m(\widehat{BAC}) = \alpha$ olur.

$\widehat{BAD}$ nde iç açılarının ölçüleri toplamını yazalım.

$m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{ADB}) + m(\widehat{ABD}) = 180°$

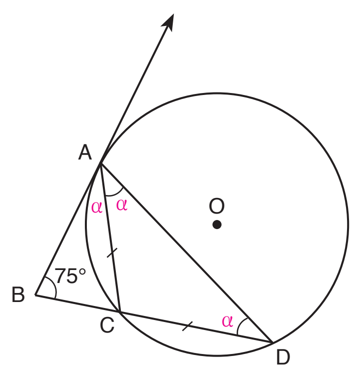
$2\alpha + \alpha + 75° = 180°$

$3\alpha + 75° = 180°$

$3\alpha = 105°$

$\alpha = 35°$ olur. Buradan

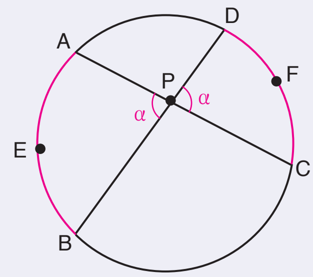
$m(\widehat{BAD}) = 2\alpha = 2 \cdot 35° = 70°$ bulunur.



Çemberde İç Açı

Bilgi

Çemberin içinde alınan herhangi bir P noktasından geçen iki kirişin oluşturduğu açıya **iç açı** denir.

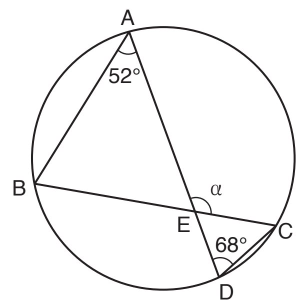


Yandaki çemberde $\widehat{APB}$ ve $\widehat{DPC}$ iç açı olup $m(\widehat{APB}) = m(\widehat{DPC})$ olur (ters açı).

İç açının ölçüsü, gördüğü yayların ölçüleri toplamının yarısına eşittir.

$$m(\widehat{APB}) = m(\widehat{DPC}) = \frac{m(\overset{\frown}{AEB}) + m(\overset{\frown}{DFC})}{2} \text{ olur.}$$

Örnek



Yandaki çemberde A, B, C ve D noktaları çember üzerindedir.

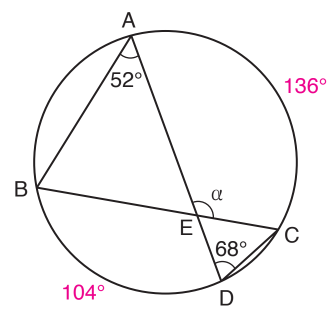
$[AD] \cap [BC] = \{E\}$,

$m(\widehat{BAD}) = 52°$,

$m(\widehat{ADC}) = 68°$ olduğuna göre

$m(\widehat{AEC}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



$\widehat{BAD}$ çevre açı olduğundan

$$m(\widehat{BAD}) = \frac{m(\overset{\frown}{BD})}{2} \Rightarrow \frac{m(\overset{\frown}{BD})}{2} = 52°$$

$$m(\overset{\frown}{BD}) = 104°$$

$\widehat{ADC}$ çevre açı olduğundan $m(\widehat{ADC}) = \frac{m(\overset{\frown}{AC})}{2}$

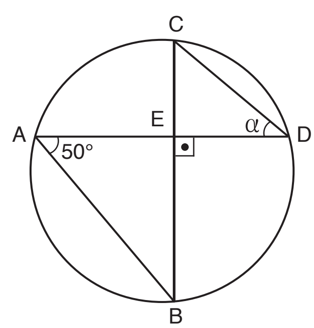
$$\frac{m(\overset{\frown}{AC})}{2} = 68°$$

$$m(\overset{\frown}{AC}) = 136° \text{ olur.}$$

$\widehat{AEC}$ iç açı olduğundan ölçüsü, gördüğü yayların ölçüleri toplamının yarısı kadardır. Buradan

$$m(\widehat{AEC}) = \alpha = \frac{m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{BD})}{2} = \frac{136° + 104°}{2} = \frac{240°}{2} = 120° \text{ bulunur.}$$

Örnek



Yandaki çemberde A, B, C ve D noktaları çember üzerindedir.

$m(\widehat{BAE}) = 50°$,

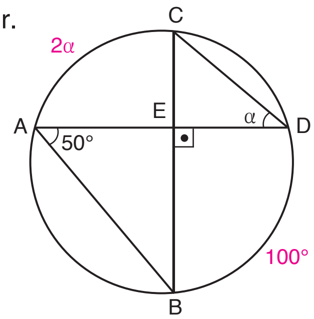
$m(\widehat{BED}) = 90°$ olduğuna göre

$m(\widehat{ADC}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm

$m(\widehat{BAD}) = 50°$ ise $m(\overset{\frown}{BD}) = 100°$ ise $m(\widehat{ADC}) = \alpha$ ise $m(\overset{\frown}{AC}) = 2\alpha$ olur.

$\widehat{BED}$ iç açı olduğundan ölçüsü, gördüğü yaylar toplamının yarısı kadardır.



$$m(\widehat{BED}) = \frac{m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{BD})}{2}$$

$$\frac{2\alpha + 100°}{2} = 90°$$

$$2\alpha + 100° = 180°$$

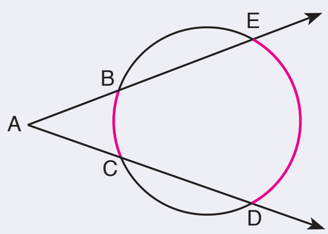
$$2\alpha = 80°$$

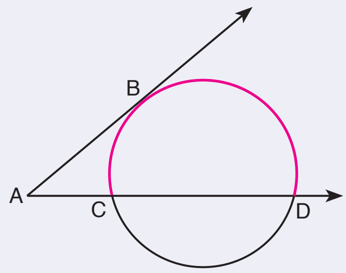
$$\alpha = 40° \text{ bulunur.}$$

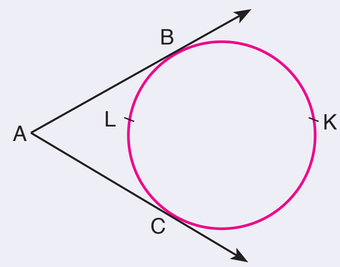
Çemberde Dış Açı

Bilgi

Köşesi çemberin dış bölgesinde, kenarları çemberin keseni veya çembere teğet olan açıya **çemberin dış açısı** denir.







$\widehat{BAC}$ dış açıdır. Bu açı, BC ve DE yaylarını görmektedir.

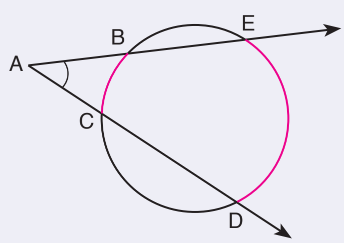
$\widehat{BAC}$ dış açıdır. Bu açı, BC ve BD yaylarını görmektedir.

$\widehat{BAC}$ dış açıdır. Bu açı, BLC ve BKC yaylarını görmektedir.

Çemberde dış açının ölçüsü, gördüğü büyük yay ile küçük yayın farkının yarısına eşittir.

Yandaki çemberde CAB dış açısının ölçüsü

$$m(\widehat{CAB}) = \frac{m(\overset{\frown}{ED}) - m(\overset{\frown}{BC})}{2}\text{'dir.}$$



Örnek

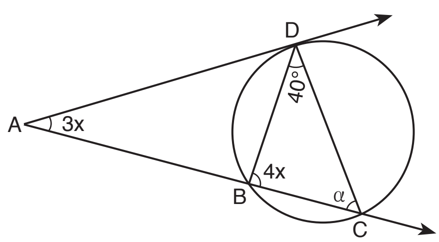
Yandaki çemberde [AD, D noktasında çembere teğet, B ve C noktaları çember üzerindedir.

$m(\widehat{BAD}) = 3x,$

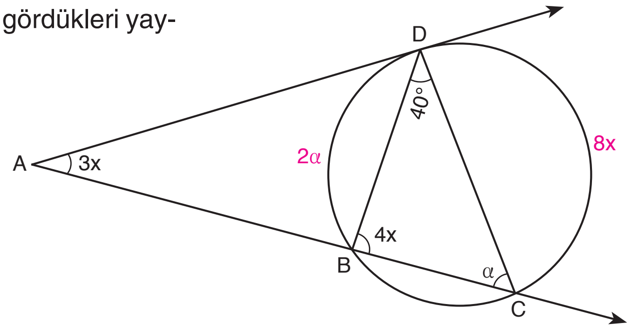
$m(\widehat{CBD}) = 4x,$

$m(\widehat{BDC}) = 40°$ olduğuna göre

$m(\widehat{BCD}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulalım.



Çözüm



$\widehat{CBD}$ ve $\widehat{BCD}$ çevre açı olduğundan ölçüleri, gördükleri yayların ölçülerinin yarısına eşittir. Buradan

$m(\widehat{CBD}) = 4x$ ise $m(\overset{\frown}{DC}) = 8x$

$m(\widehat{BCD}) = \alpha$ ise $m(\overset{\frown}{DB}) = 2\alpha$ olur.

$\widehat{BAD}$ dış açı olduğundan

$$m(\widehat{BAD}) = \frac{m(\overset{\frown}{DC}) - m(\overset{\frown}{DB})}{2}$$

$$\frac{8x - 2\alpha}{2} = 3x$$

$$8x - 2\alpha = 6x$$

$$2x = 2\alpha$$

$$x = \alpha \text{ olur.}$$

$\widehat{BDC}$ nde iç açılarının ölçüleri toplamını yazalım.

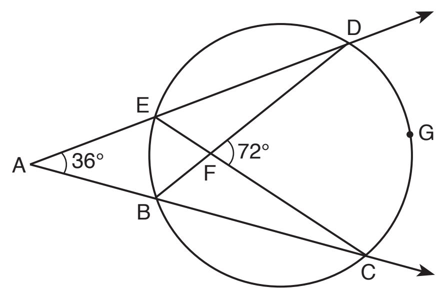
$$m(\widehat{DBC}) + m(\widehat{BCD}) + m(\widehat{BDC}) = 180°$$

$$4x + x + 40° = 180°$$

$$5x = 140°$$

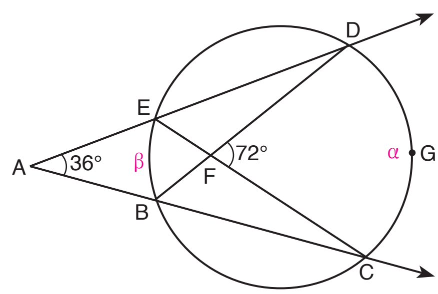
$$x = 28° \text{dir.}$$

Örnek



Yandaki çemberde B, C, D ve E noktaları çember üzerinde, $\widehat{CAD}$ dış açı, $\widehat{CFD}$ iç açı, $m(\widehat{CAD}) = 36°$, $m(\widehat{CFD}) = 72°$ olduğuna göre $m(\overset{\frown}{DGC})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



Çemberde $m(\overset{\frown}{DGC}) = \alpha$, $m(\overset{\frown}{EB}) = \beta$ diyelim.

$\widehat{CFD}$ iç açı olduğundan

$$m(\widehat{CFD}) = \frac{m(\overset{\frown}{DGC}) + m(\overset{\frown}{EB})}{2}$$

$72° = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ ise $\alpha + \beta = 144°$ olur. ...(1) ve

$\widehat{CAD}$ dış açı olduğundan

$$m(\widehat{CAD}) = \frac{m(\overset{\frown}{DGC}) - m(\overset{\frown}{EB})}{2}$$

$36° = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$ ise $\alpha - \beta = 72°$ olur. ...(2) elde edilir.

(1) ve (2) den

$$\begin{array}{r} \alpha + \cancel{\beta} = 144° \\ + \quad \alpha - \cancel{\beta} = 72° \\ \hline 2\alpha = 216° \end{array}$$

ise $\alpha = 108°$ olur.

$m(\overset{\frown}{DGC}) = 108°$ bulunur.

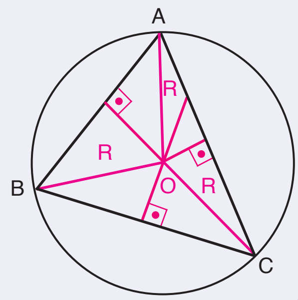
Bilgi

Bir üçgenin köşelerinden geçen çembere, bu üçgenin **çevrel çemberi** denir.

Üçgenin kenarları çemberin birer kirişi olduğundan çevrel çemberin merkezi, kenar orta dikmelerin kesişme noktasıdır.

Çevrel çemberin yarıçapının uzunluğu R olmak üzere

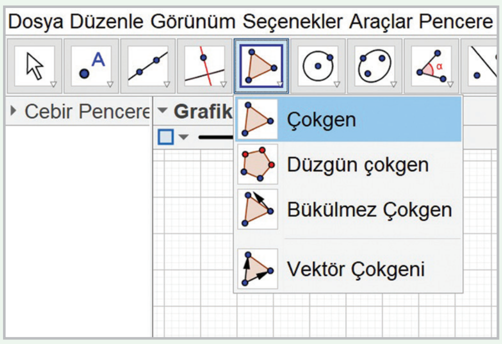
$|OA| = |OB| = |OC| = R$ dir.

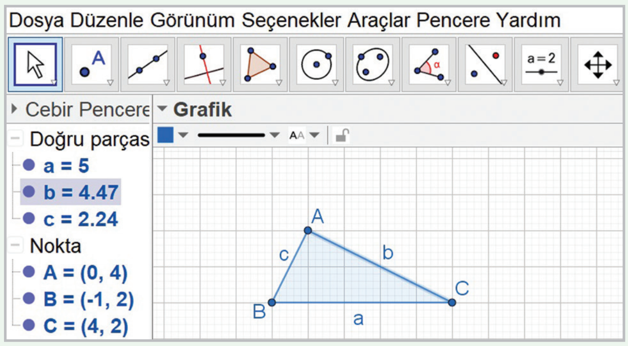


Bilgi-İletişim Teknolojisi

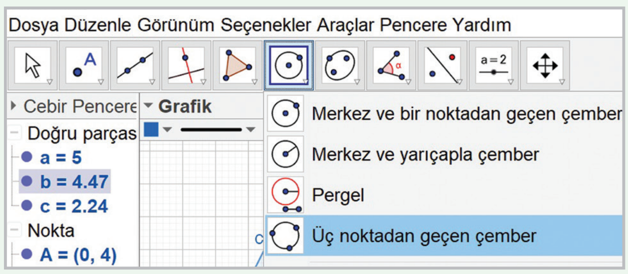
Dinamik matematik yazılımını çalıştıralım.

Çokgen menüsünü seçelim. Üç nokta seçerek ABC üçgenini çizelim.

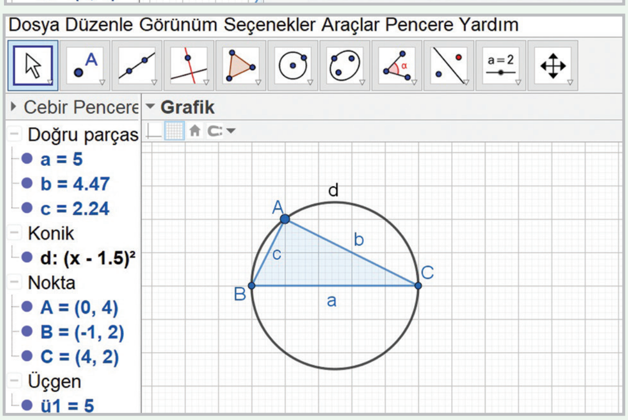




Üç noktadan geçen çember menüsünü seçelim.



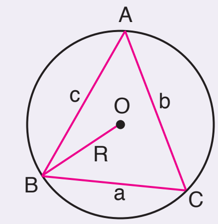
Üçgenin köşe noktalarını seçtiğimizde ABC üçgeninin çevrel çemberini çizmiş oluruz.



Video

Sinüs Teoremi

Özellik

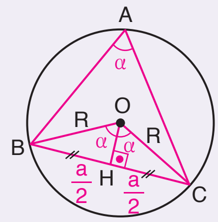


Bir $\widehat{ABC}$ nin kenar uzunlukları $|BC| = a$,

$|AC| = b$, $|AB| = c$; açıları $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ ve $\widehat{ABC}$ nin çevrel çemberinin yarıçapı R olmak üzere

$\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R$ eşitliğine **sinüs teoremi** denir.

İspat



Yandaki çemberde $|OB| = |OC| = R$ ve $|BC| = a$ dır.

$\widehat{BAC}$ çevre açı, $\widehat{BOC}$ merkez açı olmak üzere aynı yayı görmektedir. O hâlde

$m(\widehat{BAC}) = \alpha$ ise $m(\widehat{BOC}) = 2\alpha$ olur.

$[OH] \perp [BC]$ olacak şekilde $[BC]$ nı çizersek kirişe inilen dikme kirişi eşit parçalara ayırdığından,

$|BH| = |HC| = \frac{a}{2}$ ve $\widehat{BOC}$ ikizkenar üçgen olduğundan $[OH]$ aynı zamanda açıortaydır. $m(\widehat{BOC}) = 2\alpha$ ise $m(\widehat{BOH}) = m(\widehat{HOC}) = \alpha$ olur. Dik üçgende trigonometrik bağıntılardan

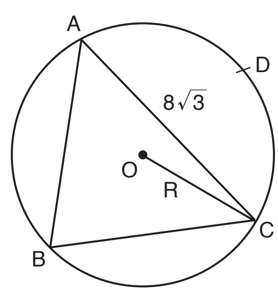
$\sin(\widehat{BOH}) = \dfrac{|BH|}{|BO|} = \dfrac{\frac{a}{2}}{R}$ ise $\sin(\widehat{BOH}) = \dfrac{a}{2R}$ ise

$\dfrac{1}{\sin(\widehat{BOH})} = \dfrac{2R}{a}$ ise $\dfrac{a}{\sin(\widehat{BOH})} = 2R$ olur. $m(\widehat{BOH}) = m(\widehat{A}) = \alpha$ olduğundan

$\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = 2R$ dir. Benzer şekilde $\dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = 2R$ ve $\dfrac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R$ olduğundan

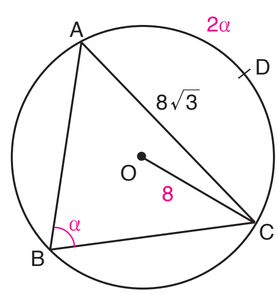
$\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R$ elde edilir.

Örnek



$\widehat{ABC}$ dar açılı bir üçgendir ve köşeleri çemberin üzerindedir. Çemberin yarıçapının uzunluğu 8 cm, $|AC| = 8\sqrt{3}$ cm olduğuna göre $m(\widehat{ADC})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



$\widehat{ABC}$ çevre açı olduğundan ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsünün yarısı kadardır.

$m(\widehat{ABC}) = \alpha$ dersek $m(\widehat{ADC}) = 2\alpha$ olur.

Sinüs teoreminden $\dfrac{|AC|}{\sin(\widehat{ABC})} = 2 \cdot R$ dir (R, çevrel çemberin yarıçapı).

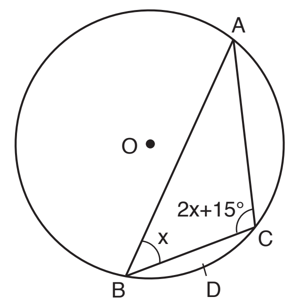
$$\frac{8\sqrt{3}}{\sin(\widehat{ABC})} = 2 \cdot 8 = 16$$ olduğundan

$\sin(\widehat{ABC}) = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ bulunur.

Sinüsü $\frac{\sqrt{3}}{2}$ olan açılarının ölçüleri, 60° ve 120°dir. $\overset{\frown}{ABC}$ dar açılı üçgen olduğundan

$m(\widehat{ABC}) = \alpha = 60°$dir. Buradan $m(\widehat{ADC}) = 2\alpha = 2 \cdot 60° = 120°$ bulunur.

Örnek



$\overset{\frown}{ABC}$ nin köşeleri O merkezli çemberin üzerindedir.

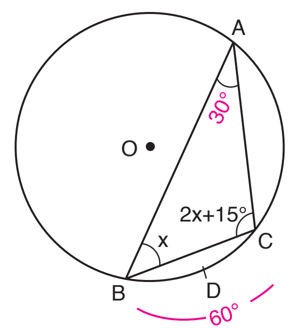
$|AC| = 12\sqrt{2}$ cm,

$m(\widehat{BDC}) = 60°$,

$m(\widehat{ABC}) = x$,

$m(\widehat{ACB}) = 2x + 15°$ olduğuna göre O merkezli çemberin yarıçapının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulalım.

Çözüm



$\widehat{BAC}$ çevre açı olduğundan ölçüsü, gördüğü yayın yarısına eşittir.

$m(\widehat{BAC}) = \frac{m(\widehat{BDC})}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$ olur.

$\overset{\frown}{ABC}$ nde iç açılarının ölçüleri toplamını yazalım.

$m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{BAC}) = 180°$

$x + 2x + 15° + 30° = 180°$

$3x + 45° = 180°$

$3x = 135°$

$x = 45°$ olur.

O merkezli çember, $\overset{\frown}{ABC}$ nin çevrel çemberi olduğundan sinüs teoremini uygulayalım.

$\frac{|BC|}{\sin\widehat{A}} = \frac{|AC|}{\sin\widehat{B}} = \frac{|AB|}{\sin\widehat{C}} = 2R$ (R, çevrel çemberin yarıçapı)

$\frac{|AC|}{\sin\widehat{B}} = 2R$

$2R = \frac{12\sqrt{2}}{\sin 45°}$

$2R = \frac{12\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

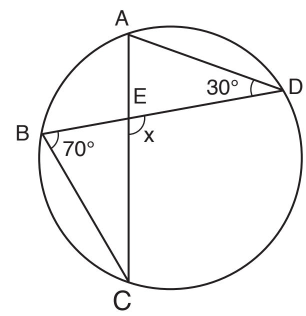
$2R = 12\sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}$ ise $R = 12$ cm bulunur.

Alıştırmalar 5-2

1. A, B, C, D noktaları çemberin üzerindedir.

$m(\widehat{CBD}) = 70°$, $m(\widehat{ADB}) = 30°$ olduğuna göre

$m(\widehat{CED}) = x$ in kaç derece olduğunu bulunuz.

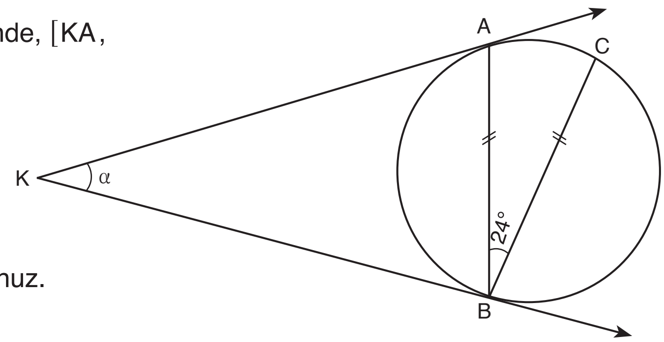


2. Yandaki çemberde C noktası çember üzerinde, $[KA$, A noktasında; $[KB$, B noktasında çembere teğettir.

$|AB| = |BC|$ ve

$m(\widehat{ABC}) = 24°$ olduğuna göre

$m(\widehat{AKB}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulunuz.

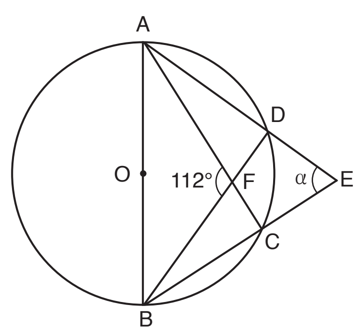


3. O merkezli çemberde $[AB]$ çap, C ve D noktaları çember üzerindedir.

$\widehat{AEB}$ dış açı, $\widehat{AFB}$ iç açı,

$m(\widehat{AFB}) = 112°$ olduğuna göre

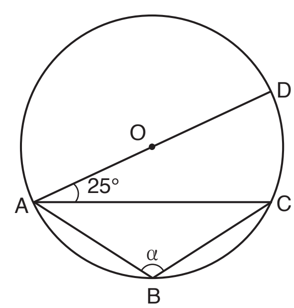
$m(\widehat{AEB}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulunuz.



4. O merkezli çemberde $[AD]$ çap ve A, B, C, D noktaları çember üzerindedir.

$m(\widehat{CAD}) = 25°$ olduğuna göre

$m(\widehat{ABC}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulunuz.



5. Aşağıdaki cümlelerin başındaki kutucuğa, ifade doğruysa "D", yanlış ise "Y" yazınız.

a) ☐ Çemberde teğet-kiriş açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsüne eşittir.

b) ☐ Çemberde aynı yayı gören çevre açıların ölçüleri eşittir.

c) ☐ Çemberde iç açının ölçüsü, gördüğü yayların ölçüleri toplamına eşittir.

ç) ☐ Çemberde dış açı, gördüğü yaylar farkının mutlak değerinin yarısına eşittir.

6. O merkezli çemberde $[OD]$ ve $[OC]$ yarıçap,

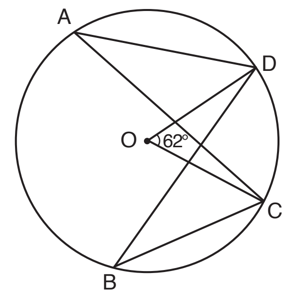
A ve B noktaları çember üzerinde,

$m(\widehat{COD}) = 62°$ olduğuna göre

$m(\widehat{CAD}) + m(\widehat{CBD})$ kaç derecedir?

A) 56° B) 58° C) 60°

D) 62° E) 64°



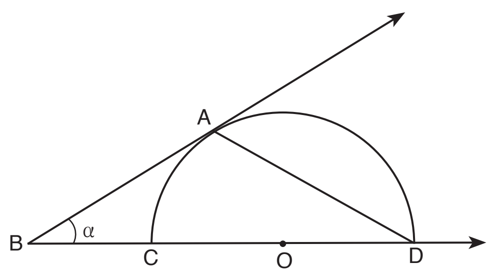
7. $[BA$, O merkezli yarım çembere A noktasında teğet,

$m(\widehat{ADB}) = 2m(\widehat{ABC})$ olduğuna göre

$m(\widehat{ABC}) = \alpha$ kaç derecedir?

A) 16° B) 18° C) 20°

D) 24° E) 36°



8. A, B, C ve D noktaları çember üzerindedir.

$m(\widehat{ADC}) = 210°$,

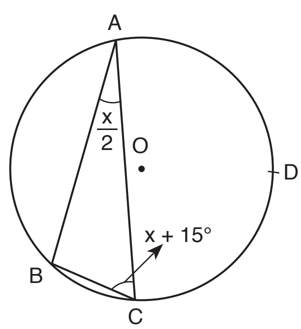
$m(\widehat{BAC}) = \frac{x}{2}$,

$m(\widehat{ACB}) = x + 15°$

olduğuna göre x kaç derecedir?

A) 15° B) 25° C) 30°

D) 35° E) 40°



9. Bir $\widehat{ABC}$ nin çevrel çemberinin yarıçapının uzunluğu 5 br ve $|BC| = 3$ br olduğuna göre $\sin(\widehat{BAC})$ değerini bulunuz.

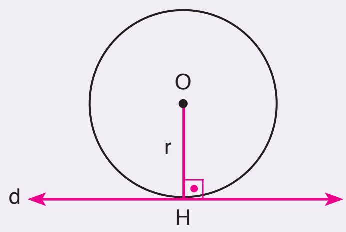
5.3. ÇEMBERDE TEĞET

5.3.1. Çemberde Teğetin Özellikleri

Özellik

Çemberin herhangi bir noktasındaki teğeti, değme noktasında çemberin yarıçapına diktir.

O merkezli çemberde, H değme noktası olmak üzere $[OH] \perp d$ olur.



İspat

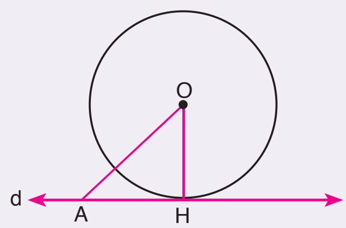
Varsayalım ki $[OA] \perp d$ olsun.

AHO dik üçgeninde [OH] hipotenüs olacağından $|OA| < |OH|$ olur. ..... (1)

H noktası çemberin üzerinde, A noktası çemberin dışında olduğundan

$|OH| < |OA|$ olur. ..... (2)

(1) ve (2) eşitsizliklerinden dolayı bu durum bir çelişkidir. Dolayısıyla başlangıçta varsaydığımız yarıçapın teğet noktasına dik olmaması durumu yanlıştır. O hâlde $[OH] \perp d$ olur.

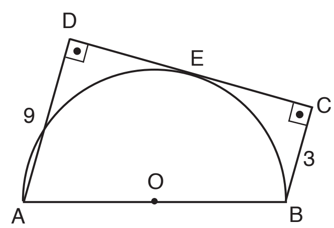


Örnek

O merkezli çemberde [DC] çembere E noktasında teğet,

$[AD] \perp [DC]$, $[BC] \perp [DC]$, $|AD| = 9$ cm,

$|BC| = 3$ cm olduğuna göre çemberin yarıçapının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulalım.



Çözüm

[OE] nı çizersek teğetin değme noktasında teğet, yarıçapa dik olur.

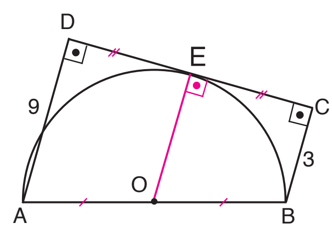
$[BC] \perp [DC]$, $[AD] \perp [DC]$ olduğundan ABCD dik yamuktur.

$[OE] \perp [DC]$ olduğundan $[OE] // [AD] // [BC]$ ve

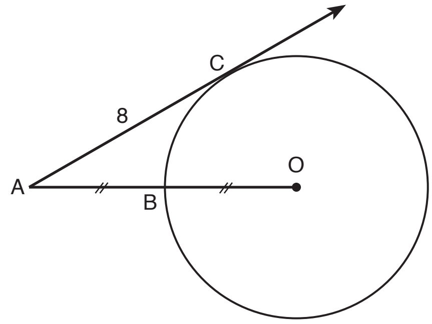
$|OA| = |OB|$ olduğundan $|DE| = |EC|$ olur.

O hâlde |OE|, ABCD yamuğunun orta tabanıdır. Buradan

$|OE| = r = \dfrac{|AD| + |BC|}{2} = \dfrac{9+3}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$ cm bulunur.



Örnek

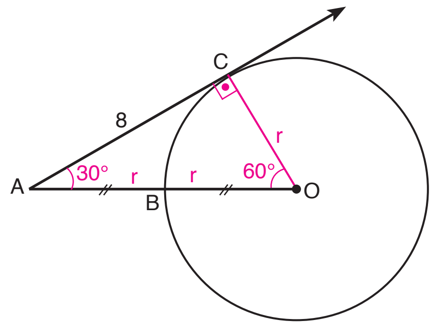


O merkezli çemberde [AC çembere C noktasında teğet ve B noktası çember üzerindedir.

$|AB| = |OB|$, $|AC| = 8$ cm olduğuna göre

çemberin yarıçap uzunluğunun kaç cm olduğunu bulalım.

Çözüm



$|OC| = r$ yarıçapını çizersek $[OC] \perp [AC]$ olur.

$|AB| = |OB| = |OC| = r$ olduğundan

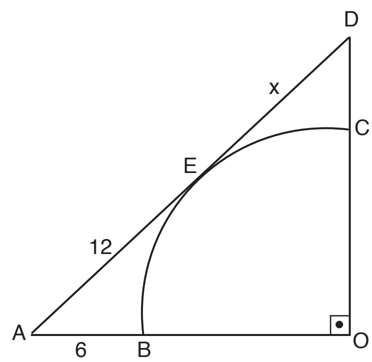
$|AO| = 2r$, $|OC| = r$ ve $m(\widehat{ACO}) = 90°$ olduğundan

$m(\widehat{OAC}) = 30°$dir. (30° - 60° - 90° özel üçgeni)

$|AC| = \sqrt{3} \cdot |OC| = 8$ olduğundan

$|OC| = r = \dfrac{8}{\sqrt{3}} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ cm bulunur.

Örnek



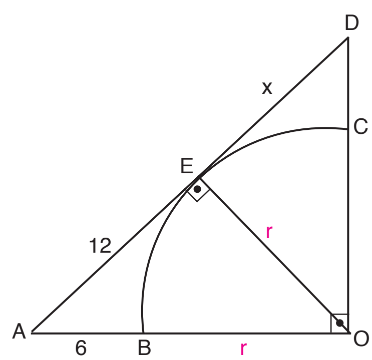
O merkezli çeyrek çemberde, [OB] yarıçap,

[AD] çembere E noktasında teğettir.

$|AB| = 6$ cm, $|AE| = 12$ cm olduğuna göre

$|ED| = x$ in kaç cm olduğunu bulalım.

Çözüm



[OE] yarıçapını çizelim.

$[OE] \perp [AE]$ olur.

$|OE| = |OB| = r$ dir.

AEO dik üçgeninde Pisagor teoremini uygularsak

$|AE|^2 + |OE|^2 = |AO|^2$

$12^2 + r^2 = (r+6)^2$

$144 + r^2 = r^2 + 12r + 36$

$12r = 108$

$r = 9$ cm olur.

O merkezli çeyrek çember olduğundan $m(\widehat{AOD}) = 90°$dir.

O hâlde AOD dik üçgeninde Öklid teoremini uygularsak

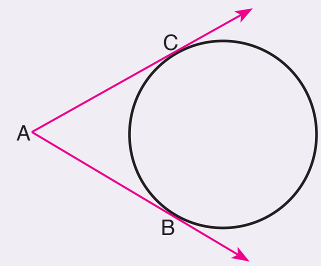
$|OE|^2 = |AE| \cdot |ED| \Rightarrow 12 \cdot x = 9^2$

$x = \dfrac{81}{12} = \dfrac{27}{4}$ cm buluruz.

Özellik

Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları birbirine eşittir.

[AB ve [AC sırasıyla çembere B ve C noktasında teğet ise $|AC| = |AB|$ dur.



İspat

Yarıçap, teğetin değme noktasında teğete dik olduğundan AOB ve AOC dik üçgendir.

Bu üçgenlerde Pisagor teoremini uygularsak

$|AC|^2 + r^2 = |AO|^2$.....(1)

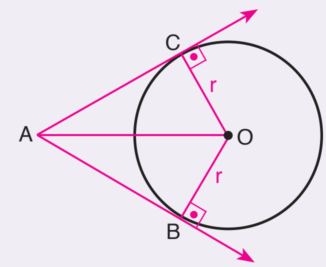
$|AB|^2 + r^2 = |AO|^2$ olur. .....(2)

(1) ve (2) den

$|AC|^2 + \cancel{r^2} = |AB|^2 + \cancel{r^2}$

$|AC|^2 = |AB|^2$

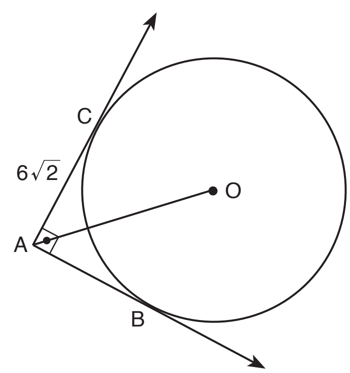
$|AC| = |AB|$ olur.



Örnek

[AB ve [AC çembere sırasıyla B ve C noktalarında teğettir.

$[AB] \perp [AC]$, $|AC| = 6\sqrt{2}$ cm olduğuna göre A noktasının çemberin merkezine uzaklığının kaç cm olduğunu bulalım.



Çözüm

$[OC] \perp [AC]$, $[OB] \perp [AB]$ ve $[AO]$ nı çizelim.

$|AC| = |AB|$, $|OC| = |OB| = r$, $[OB] \perp [AB]$,

$[OC] \perp [AC]$ olduğundan $[AO]$ aynı zamanda açıortaydır. (Açıortay üzerinde alınan herhangi bir noktadan açının kollarına inilen dikmelerin uzunlukları eşittir.)

O hâlde $m(\widehat{AOC}) = 45°$ olur.

Bu nedenle AOC dik üçgeni ikizkenar dik üçgendir.

$|AC| = |OC| = 6\sqrt{2}$ cm olur.

AOC dik üçgeninde Pisagor teoremini uygularsak

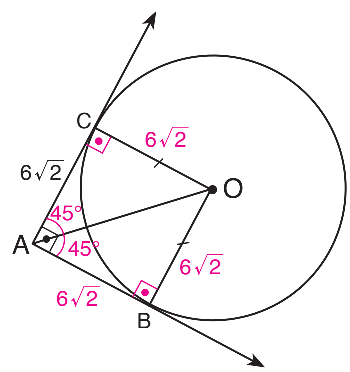
$|AO|^2 = |AC|^2 + |OC|^2$

$|AO|^2 = (6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2$

$|AO|^2 = 72 + 72$

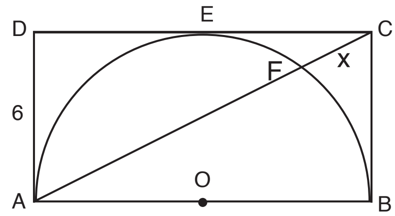
$|AO|^2 = 144$

$|AO| = 12$ cm olur.

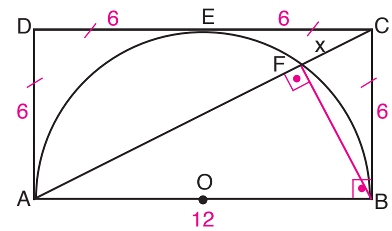


Örnek

ABCD dikdörtgeni O merkezli yarım çembere A, B ve E noktalarında teğettir. F noktası çember üzerinde ve $|AD| = 6$ cm olduğuna göre $|FC| = x$ in kaç cm olduğunu bulalım.



Çözüm



Teğet parçaları birbirine eşit olduğundan

$|AD| = |DE|$, $|EC| = |BC|$ ve ABCD dikdörtgen olduğundan

$|AD| = |ED| = |EC| = |BC| = 6$ cm olur. Buradan

$|DC| = |AB| = 12$ cm'dir.

[BF] nı çizelim $\widehat{AFB}$ çapı gördüğünden $m(\widehat{AFB}) = 90°$dir.

ABCD dikdörtgen olduğundan $m(\widehat{ABC}) = 90°$ olur. ABC dik üçgeninde Pisagor teoremini uygularsak

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$

$$|AC|^2 = 12^2 + 6^2$$

$$|AC|^2 = 144 + 36$$

$$|AC|^2 = 180$$

$|AC| = 6\sqrt{5}$ cm olur. ABC dik üçgeninde Öklid teoremini uygularsak

$$|BC|^2 = |FC| \cdot |AC|$$

$$6^2 = x \cdot 6\sqrt{5}$$

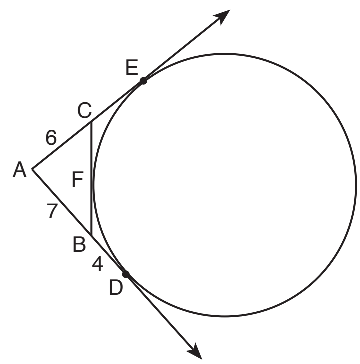
$$x = \frac{36}{6\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ cm olur.}$$

Örnek

Yandaki çemberde D, E, F teğet değme noktalarıdır.

$|AC| = 6$ cm, $|AB| = 7$ cm, $|BD| = 4$ cm olduğuna göre

$|BC|$ nun kaç cm olduğunu bulalım.



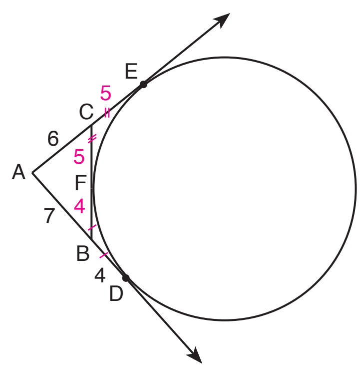
Çözüm

Çemberin dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları birbirine eşit olduğundan

$|BD| = |BF| = 4$ cm,

$|AD| = |AE| = 11$ cm olduğundan $|CE| = |CF| = 5$ cm'dir.

O hâlde $|BC| = |BF| + |FC| = 4 + 5 = 9$ cm bulunur.

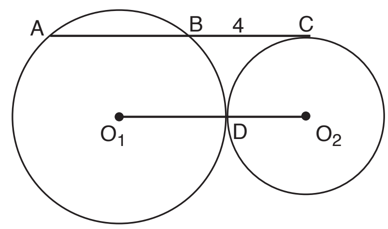


Örnek

O_1 ve O_2 merkezli çemberler birbirlerine dıştan teğettir.

A ve B noktaları O_1, C noktası O_2 merkezli çember üzerindedir. $[AC] // [O_1O_2]$, $|BC| = 4$ cm, $|O_1O_2| = 6$ cm ise

O_1 merkezli çemberin yarıçapının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulalım.



Çözüm

$[O_1H]$ ve $[O_2C]$ nı çizelim. $[O_1H] \perp [AB]$ ve $[O_2C] \perp [BC]$ olur. $|O_1O_2| = 6$ cm ise

O_1 merkezli çemberin yarıçapı r_1 diyelim.

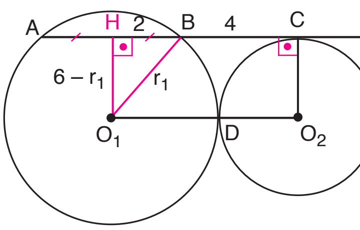
$|O_1O_2| = 6$ olduğundan $|DO_2| = 6 - r_1$ olur.

Başka bir ifadeyle O_2 merkezli çemberin yarıçapı $6 - r_1$ dir.

$[O_1H] \perp [AB]$ olduğundan $|O_1H| = 6 - r_1$ olur.

$|HC| = |O_1O_2|$ olacağından $|HB| = 2$ cm'dir.

O_1HB dik üçgeninde Pisagor teoremini uygularsak



$$|O_1H|^2 + |HB|^2 = |O_1B|^2$$

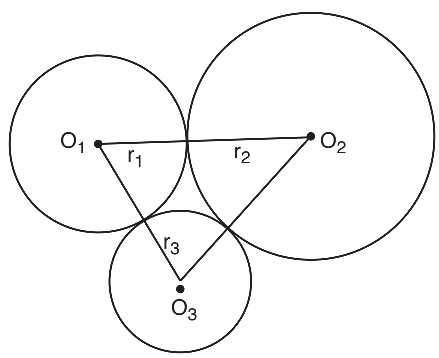
$$(6 - r_1)^2 + 2^2 = r_1^2$$

$$36 - 12r_1 + r_1^2 + 4 = r_1^2 \Rightarrow 12r_1 = 40 \Rightarrow r_1 = \frac{40}{12} \Rightarrow r_1 = \frac{10}{3} \text{ cm bulunur.}$$

Örnek

O_1, O_2 ve O_3 merkezli çemberler birbirine ikişer ikişer teğettir.

$|O_1O_2| = 12$ cm, $|O_1O_3| = 9$ cm, $|O_2O_3| = 11$ cm ise O_3 merkezli çemberin yarıçapının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulalım.



Çözüm

$|O_1O_2| = r_1 + r_2 = 12,$

$|O_1O_3| = r_1 + r_3 = 9,$

$|O_2O_3| = r_2 + r_3 = 11$

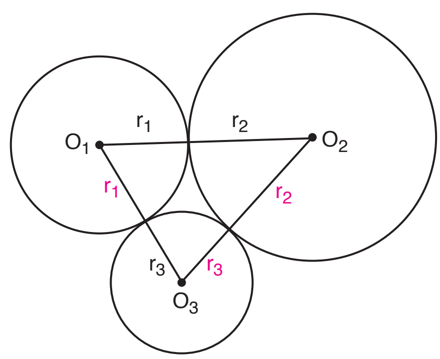
$$\begin{array}{l} r_1 + r_2 = 12 \\ r_1 + r_3 = 9 \\ + \quad r_2 + r_3 = 11 \\ \hline 2r_1 + 2r_2 + 2r_3 = 32 \end{array}$$

$2(r_1 + r_2 + r_3) = 32$

$r_1 + r_2 + r_3 = 16$ olur. $r_1 + r_2 = 12$ olduğundan

$12 + r_3 = 16$

$r_3 = 4$ cm bulunur.

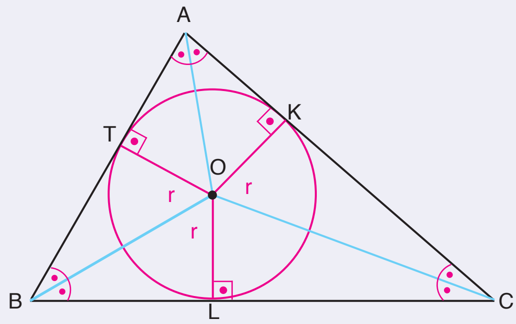


Bilgi

Bir üçgenin iç bölgesinde bulunan ve üçgenin kenarlarına teğet olan çembere, bu üçgenin **iç teğet çemberi** denir.

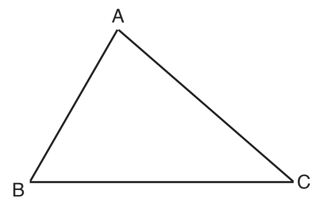
Bir üçgenin iç teğet çemberinin merkezi, üçgenin iç açıortaylarının kesim noktasıdır.

İç teğet çemberin yarıçapının uzunluğu r olmak üzere $|OT| = |OL| = |OK| = r$ dir.



Örnek

Pergel ve cetvel kullanarak yandaki $\widehat{ABC}$ nin iç teğet çemberlerini çizelim.



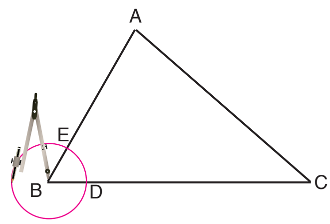
Çözüm

Çizeceğimiz iç teğet çemberin merkezi ABC üçgeninin iç açıortaylarının kesişim noktasıdır.

İlk önce üçgenin iç açıortaylarını çizelim.

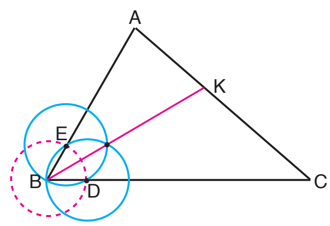
Pergelimizle üçgenin B köşesini merkez kabul eden [AB] ve [BC] nı kesen bir çember çizelim.

Çemberlerin doğru parçalarını kestiği noktaları D ve E olarak adlandıralım.

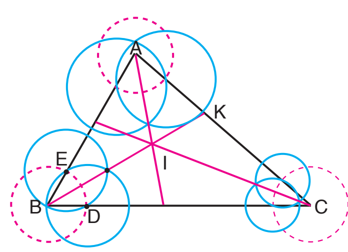


D ve E merkezli [DE] yarıçaplı iki çember çizelim. Çemberlerin kesim noktasını işaretleyelim. Üçgenin B köşesi ile çemberlerin kesim noktasını birleştirerek [AC] nı kesen [BK] nı çizelim.

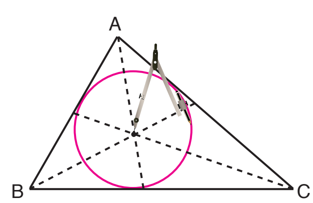
Çizdiğimiz doğrunun [AC] nı kestiği noktayı K ile adlandıralım.



[BK], ABC üçgeninin $\widehat{ABC}$ na ait açıortayı olur. Aynı şekilde $\widehat{BCA}$ ve $\widehat{CAB}$ nın açıortaylarını çizelim. Bu açıortayların kesim noktasını I olarak adlandıralım.

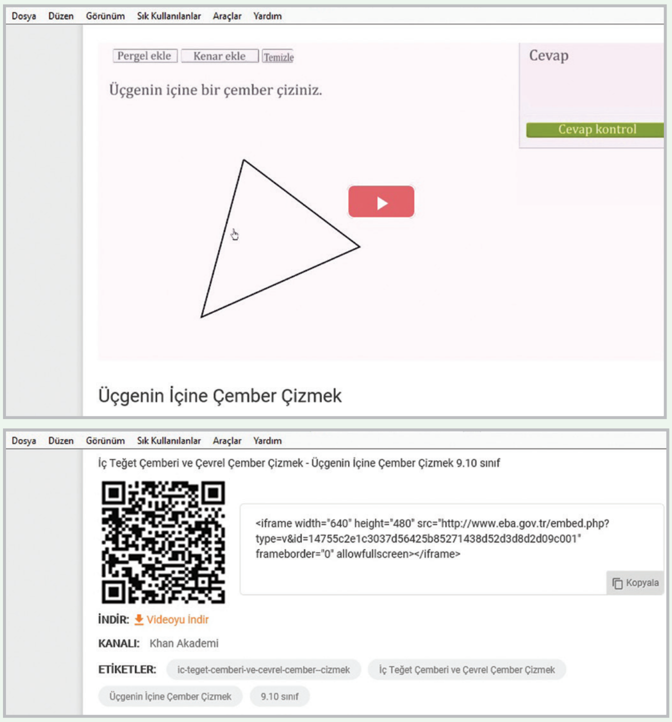


Pergelimizle üçgenin kenarlarına teğet olacak şekilde I merkezli çemberi çizelim. Çizilen çember bu üçgenin iç teğet çemberidir.



Bilgi-İletişim Teknolojisi

www.eba.gov.tr genel ağ adresinden ya da aşağıdaki karekodu akıllı cihazınıza okutarak üçgenin iç teğet çemberi çizme videosunu izleyebilirsiniz.

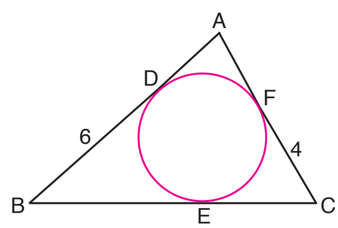


Örnek

Yandaki şekilde $\overset{\frown}{ABC}$ nin üzerindeki D, E ve F noktaları çembere teğettir.

$|FC| = 4$ br, $|BD| = 6$ br

$Ç(\overset{\frown}{ABC}) = 26$ br olduğuna göre $|AD|$ nun kaç br olduğunu bulalım.



Çözüm

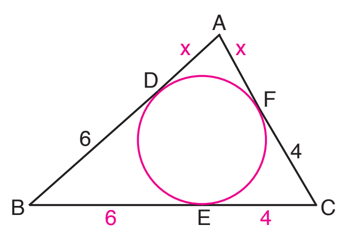
B noktasından çembere çizilen teğet parçalarından dolayı $|BD| = |BE| = 6$ br,

C noktasından çembere çizilen teğet parçalarından dolayı

$|CE| = |CF| = 4$ br olur.

A noktasından çizilen teğet parçalarından dolayı

$|AD| = |AF| = x$ olsun.



$Ç(\overset{\frown}{ABC}) = |AB| + |BC| + |CA| \Rightarrow 26 = x + 6 + 6 + 4 + 4 + x$

$\Rightarrow 26 = 2x + 20 \Rightarrow 2x = 26 - 20 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$ br bulunur.

Özellik

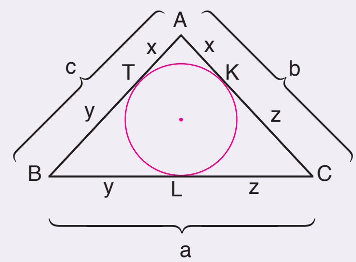
ABC üçgeninde $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$ ve üçgenin çevresi

$a + b + c = 2u$ ise

$|AT| = |AK| = u - a$,

$|BT| = |BL| = u - b$,

$|CK| = |CL| = u - c$'dir.



İspat

$$\left.\begin{array}{l} |AT| = |AK| = x \\ |BT| = |BL| = y \\ |CK| = |CL| = z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = y + z \\ b = x + z \\ c = x + y \end{array}$$ olur.

Buna göre ABC üçgeninin çevresi,

$a + b + c = 2u \Rightarrow x + y + z = u$ olur.

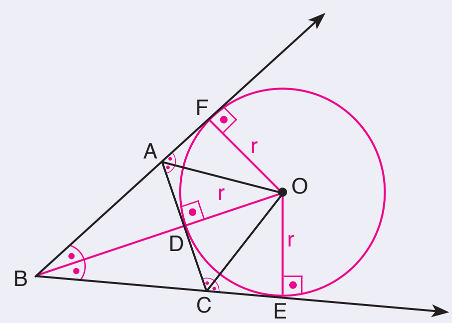
$y + z = a$ olduğundan $x + a = u \Rightarrow x = u - a$ bulunur.

Benzer yolla diğer eşitlikleri de siz gösteriniz.

Bilgi

Üçgenin bir kenarına ve diğer iki kenarının uzantısına teğet olan çembere **dış teğet çemberi** denir.

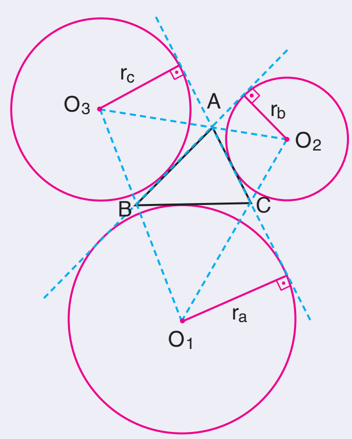
Bir üçgenin herhangi bir açısının iç açıortayı ile diğer iki açısının dış açıortayı aynı noktada kesişir. Yandaki şekilde bu nokta (O), ABC üçgeninin dış teğet çemberinin merkezidir.



Bir ABC çeşitkenar üçgeninin, yarıçapları farklı üç tane dış teğet çemberi vardır.

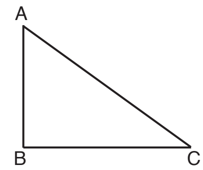
Yandaki şekilde ABC üçgeninin dış teğet çemberleri çizilmiştir.

$r_a \neq r_b \neq r_c$ dir.



Örnek

Cetvelimizle yandaki ABC üçgeninin C köşesine ait dış teğet çemberini çizelim.

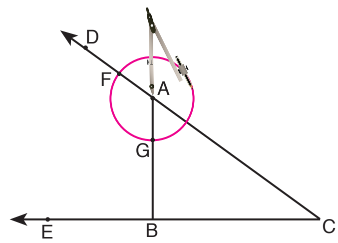


Çözüm

[AC] ve [BC] nı yandaki gibi uzatalım.

[CA üzerinde D noktasını işaretleyelim.

Pergelimizle [CD ve [AB] nı kesecek şekilde A merkezli bir çember çizelim.

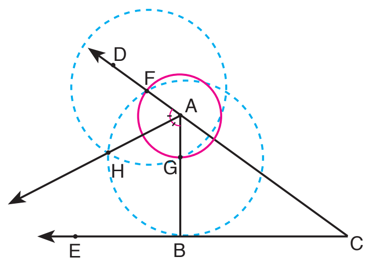


Çemberin [CD nı kesteği noktayı F, [AB] nı kestiği noktaları G olarak adlandıralım.

Pergelimizle G ve F merkezli |GF| yarıçaplı iki çember çizelim.

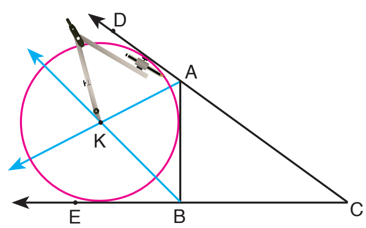
Çemberlerin kesim noktasını H olarak adlandıralım.

Cetvelimizle [AH nı çizelim. Üçgenin $\widehat{CAB}$ nın dış açıortayı [AH olur.



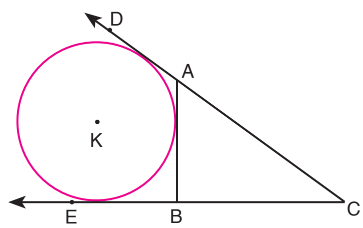
Aynı şekilde $\widehat{ABC}$ nın dış açıortayını çizelim. Açıortayların kesişim noktasını K olarak adlandıralım.

Pergelimizle K merkezli [AD ve [BE na teğet olacak şekilde bir çember çizelim.



Çizdiğimiz çember, üçgenin dış teğet çemberidir.

Diğer dış teğet çemberleri de siz çiziniz.



Örnek

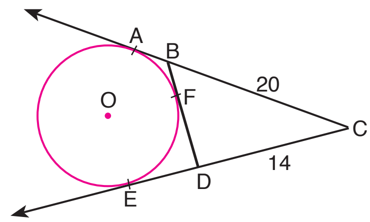
O merkezli çemberde

$[CA$, A noktasında; $[CE$, E noktasında;

$[BD]$, F noktasında çembere teğettir.

$|BC| = 20$ br, $|CD| = 14$ br,

$|BD| = 12$ br olduğuna göre $|BF|$ nu bulalım.



Çözüm

O merkezli çember

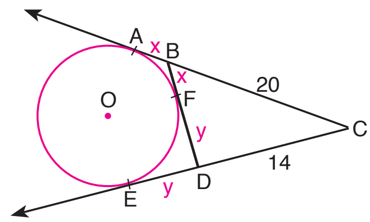
$\widehat{BCD}$ nin dış teğet çemberidir.

B noktasından çembere çizilen teğet parçalarından dolayı

$|AB| = |BF| = x$,

D noktasından çembere çizilen teğet parçalarından dolayı

$|ED| = |DF| = y$,



C noktasından çembere çizilen teğet parçalarından dolayı

$|CA| = |CE| \Rightarrow 20 + x = 14 + y \Rightarrow y - x = 20 - 14 \Rightarrow y - x = 6...(1)$ olur. ...(I)

$|BD| = 12$ br $\Rightarrow x + y = 12$ olur. ...(II)

(I) ve (II) denklemlerini ortak çözelim.

$$\begin{array}{r} y - \cancel{x} = 6 \\ + \quad \cancel{x} + y = 12 \\ \hline 2y = 18 \Rightarrow y = 9 \text{ olur.} \end{array}$$

Buradan $|BF| = x = 3$ br bulunur.

Özellik

ABC üçgeninde O merkezli çember, üçgenin dış teğet çemberi olduğuna göre

$|BC| = a$, $|AB| = c$, $|AC| = b$ ve $a + b + c = 2u$ ise

$|AD| = |AF| = u - c$, $|CE| = |CD| = u - a$, $|BE| = |BF| = u$ dur.

İspat

$|AF| = |AD| = x$, $|CD| = |CE| = y$ olsun.

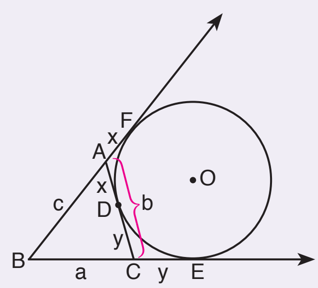
$|BF| = |BE| \Rightarrow c + x = a + y$ yazılabilir.

ABC üçgenin çevresi $a + b + c = 2u \Rightarrow a + y + x + c = 2u$,

$a + y = c + x \Rightarrow 2(c + x) = 2u$ ve $c + x = a + y = u$ dur.

Buradan $|AF| = |AD| = x = u - c$, $|CE| = |CD| = y = u - a$,

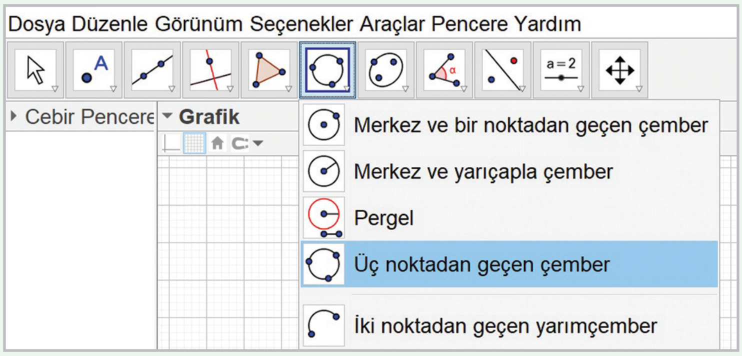
$|BE| = |BF| = u$ olur.



Bilgi-İletişim Teknolojisi

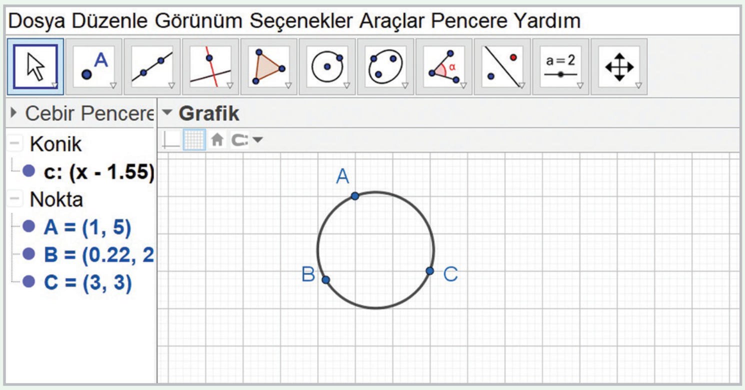
Dinamik matematik yazılımını çalıştıralım.

Üç noktadan geçen çember menüsünü seçelim.

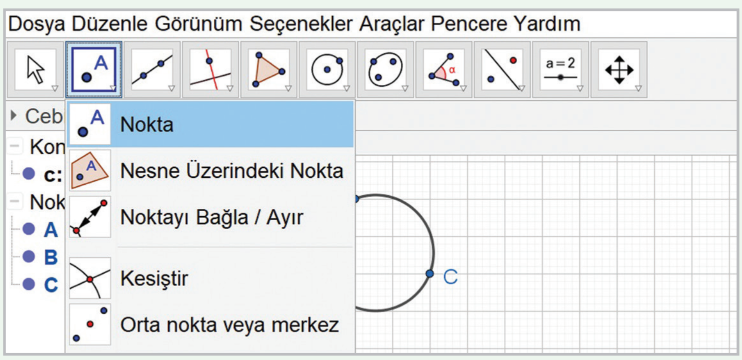


Üç nokta işaretleyerek bir çember çizelim.

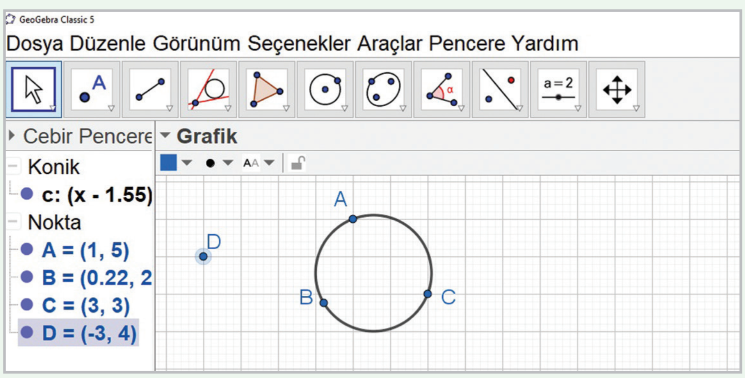
(Yandaki çember çizilir.)



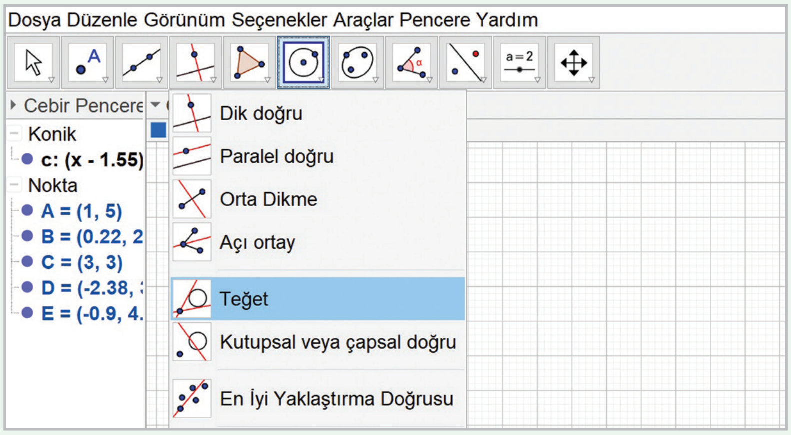
Nokta menüsünü seçelim.



Çemberin dışında D noktasını işaretleyelim.

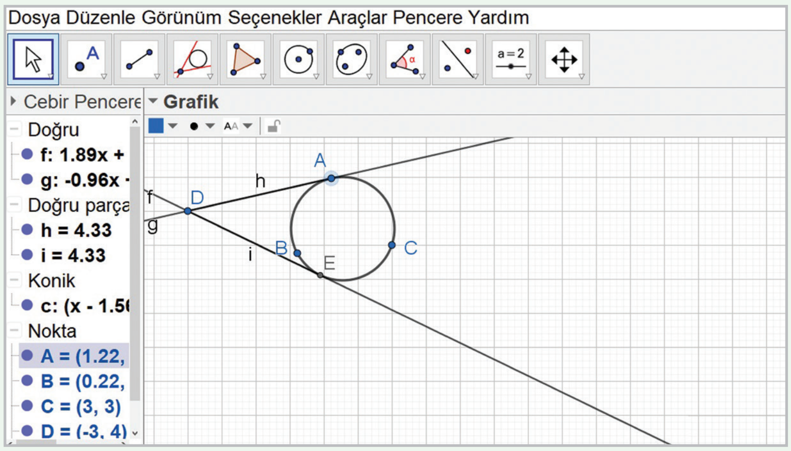


Teğet menüsünü seçelim.



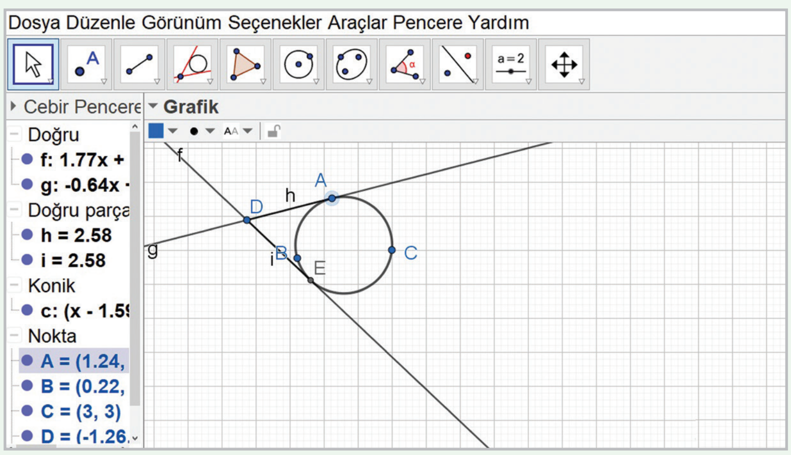
D noktasını ve çemberi tıkladığımızda D noktasından çembere teğetler çizeriz.

Görüldüğü gibi teğet uzunlukları eşittir. h = i = 4,33 br'dir.



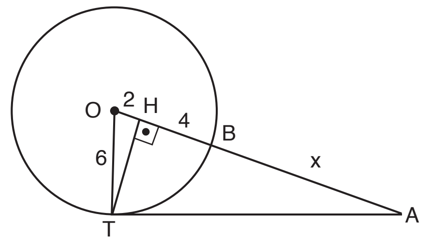
D noktasını sağa doğru sürükleyelim.

Görüldüğü gibi teğet uzunlukları eşit h = i = 2,58 br'dir.

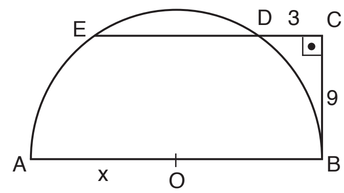


Alıştırmalar 5-3

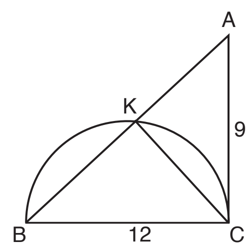
1. Şekildeki O merkezli çemberde,
B noktası çember üzerinde ve
T teğet değme noktasıdır.
$[TH] \perp [OA]$, $|OT| = 6$ cm,
$|OH| = 2$ cm, $|HB| = 4$ cm olduğuna göre
$|AB| = x$ kaç cm'dir?



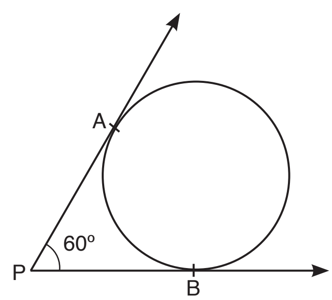
2. Şekildeki O merkezli $[AB]$
çaplı yarım çemberde B teğet
değme noktası, D ve E noktaları çember üzerindedir.
$|BC| = 9$ cm, $|DC| = 3$ cm
olduğuna göre $|AO| = x$ kaç cm'dir?



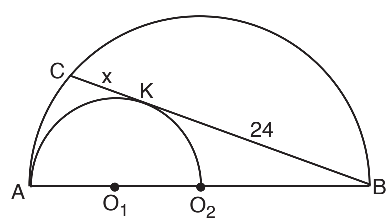
3. Şekilde $[AC]$, C noktasında
$[BC]$ çaplı çembere teğet ve K noktası çember üzerindedir.
$|BC| = 12$ cm ve $|AC| = 9$ cm olduğuna göre
$|BK|$ nu bulunuz.



4. Şekildeki $[PA$ ve $[PB$ çembere A ve B noktalarında
teğet $m(\widehat{APB}) = 60°$ ve $|PB| = 6$ cm olduğuna göre
çemberin yarıçapının uzunluğun kaç cm olduğunu
bulunuz.



5. O_1 ve O_2 merkezli yarım çemberler A noktasında teğet,
$[BC]$, O_1 merkezli çembere K noktasında teğet,
C noktası çember üzerinde, $|KB| = 24$ cm olduğuna
göre $|CK| = x$ kaç cm'dir?



5.4. DAİRENİN ÇEVRESİ VE ALANI

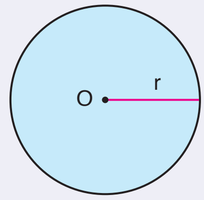
5.4.1. Dairenin Çevresi ve Dairenin Alan Bağıntısı

Dairenin Çevresi

Bilgi

Bir çember ile iç bölgesinin birleşim kümesine **daire** adı verilir.

Bütün dairelerin çevre uzunluğunun çapına oranı, yaklaşık değeri 3,14 olan bir irrasyonel sayıya eşittir. Bu sayı, pi sayısı olarak adlandırılır ve π sembolü ile gösterilir. Yarıçap r ise $\frac{\text{Çevre}}{2r} = \pi$ olacağından Çevre $= 2\pi r$ bulunur.



Örnek

Yarıçapının uzunluğu 4 cm olan bir dairenin çevre uzunluğunun kaç π cm olduğunu bulalım.

Çözüm

Çevre $= 2\pi r$ olduğundan Çevre $= 2\pi 4 = 8\pi$ cm bulunur.

Örnek

Bir traktörün ön ve arka tekerleklerinin yarıçapları oranı $\frac{2}{3}$ tür. 52 metrelik bir yolda ön tekerleğin tur sayısı arka tekerleğin tur sayısından 8 fazla olduğuna göre ön tekerleğin yarıçapının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulalım ($\pi \approx 3,14$ alalım.).



Çözüm

Ön tekerliğin yarıçapını r ve arka tekerliğin yarıçapını R ile gösterelim.

$\frac{r}{R} = \frac{2}{3} \Rightarrow r = 2k$ ve $R = 3k$ olarak $(k \in Z^{+})$ alabiliriz.

Büyük tekerlek x tur attığında küçük tekerlek $x + 8$ tur atar.

Bu tekerleklerin aldığı yollar eşittir.

$2\pi r(x+8) = 2\pi Rx \Rightarrow 2k \cdot (x+8) = 3k \cdot x \Rightarrow 2x + 16 = 3x \Rightarrow x = 16$ olur.

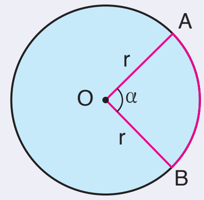
Küçük tekerlek $x + 8 = 16 + 8 = 24$ tur atarak 52 m yol alır. $52\text{ m} = 5200$ cm olur.

$5200 = 2\pi \cdot r \cdot 24 \Rightarrow 5200 = 2 \cdot 3,14 \cdot r \cdot 24 \Rightarrow r \backsimeq 34,5$ cm bulunur.

Daire Yayının Uzunluğu

Bilgi

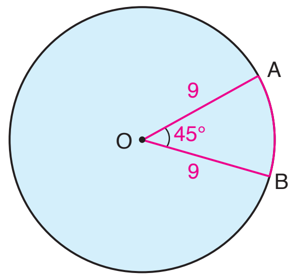
Yarıçapının uzunluğu r olan bir dairede merkez açısının ölçüsü α olan AB yayının uzunluğu, $|\overset{\frown}{AB}| = 2\pi r \cdot \dfrac{\alpha}{360°}$ olur.



Örnek

Yarıçapının uzunluğu 9 cm olan bir dairede 45°lik bir merkez açının gördüğü yay uzunluğunun kaç π cm olduğunu bulalım.

Çözüm



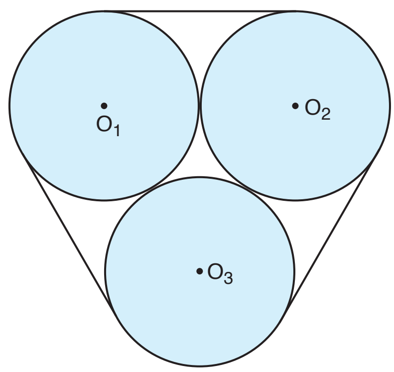
Şekildeki O merkezli dairede söz konusu yayın uzunluğu

$$|\overset{\frown}{AB}| = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°}$$

$$= 2\pi \cdot 9 \cdot \frac{45}{360} = \frac{9\pi}{4} \text{ cm bulunur.}$$

Örnek

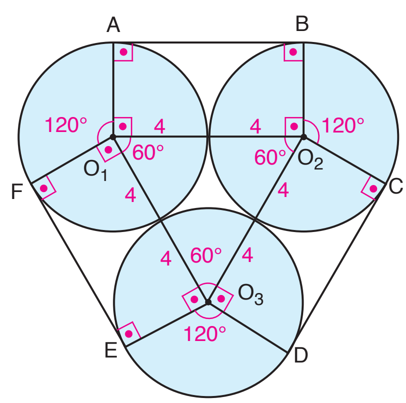
Şekilde O_1, O_2 ve O_3 merkezli, yarıçaplarının uzunlukları 4 cm olan daireler birbirine teğettir. Dairelerin etrafına gergin ip sarılmıştır. Buna göre ipin uzunluğunun kaç cm olduğunu bulalım.



Çözüm

Çemberlerin merkezlerini birleştirelim. Daireler özdeş olduğundan oluşan şekil bir eşkenar üçgendir. Ayrıca ipin dairelere teğet olduğu yerlere yarıçapları çizelim. Yarıçaplar teğet noktasında teğete diktir.

Böylece üç tane birbirine eş dikdörtgen ve üç tane birbirine eş yay elde edilir. Buradan



$m(\overset{\frown}{AF}) = m(\overset{\frown}{BC}) = m(\overset{\frown}{DE}) = 120°$ olur.

$$|\overset{\frown}{AF}| = |\overset{\frown}{BC}| = |\overset{\frown}{DE}| = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°}$$

$$= 2\pi \cdot 4 \cdot \frac{120°}{360°} = \frac{8\pi}{3} \text{ olur.}$$

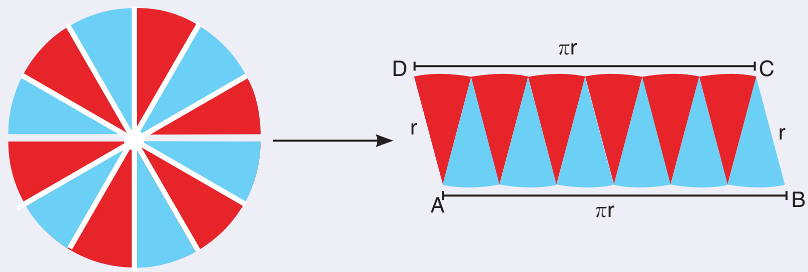
$$\text{İp uzunluğu} = |\overset{\frown}{AF}| + |\overset{\frown}{BC}| + |\overset{\frown}{DE}| + |AB| + |CD| + |EF|$$

$$= \frac{8\pi}{3} + \frac{8\pi}{3} + \frac{8\pi}{3} + 8 + 8 + 8 = 8\pi + 24 \text{ cm olur.}$$

Dairenin Alanı

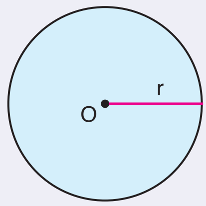
Bilgi

r yarıçaplı daire, aşağıdaki gibi eş parçalara ayrılsın.



Ayrılan parçalar şekildeki gibi birleştirildiğinde paralelkenara dönüşür. Dairenin çevresinin uzunluğu $2\pi r$ olduğundan $|AB| = \pi r$ olur. ABCD paralelkenarı parça sayısı arttıkça kısa kenarı $|BC| = r$ olan dikdörtgen olur.

$$A(ABCD) = |AB| \cdot |BC|$$
$$= \pi r \cdot r$$
$$= \pi r^2 \text{ bulunur.}$$



Yarıçapı r olan dairenin alanı $A = \pi r^2$ olur.

Örnek

Çevresinin uzunluğu 10π cm olan dairenin alanının kaç π cm^2 olduğunu bulalım.

Çözüm

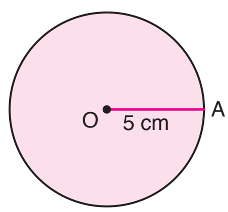
Ç $= 2\pi r$ olduğundan $2\pi r = 10\pi$ cm

$r = 5$ cm bulunur. Buradan

$A = \pi r^2$

$A = \pi \cdot 5^2$

$A = 25\pi$ cm^2 olur.



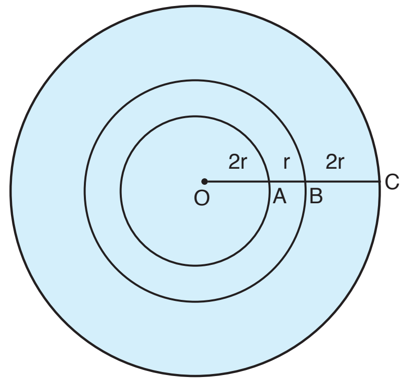
Örnek

Şekilde ortak merkezli daireler verilmiştir.

$|OA| = 2r$ br,

$|AB| = r$ br,

$|BC| = 2r$ br olduğuna göre en içteki dairenin alanının en dıştaki dairenin alanına oranını bulalım.



Çözüm

En içteki dairenin alanına A_1 diyelim.

En içteki dairenin yarıçapı $|OA| = 2r$ olduğundan

$A_1 = \pi(2r)^2 = 4\pi r^2$ olur.

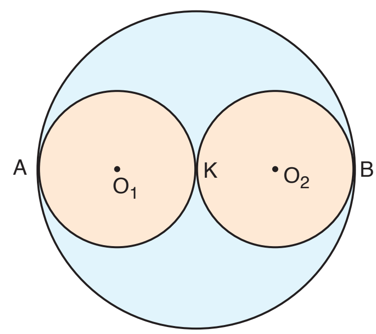
En dıştaki dairenin alanına A_2 diyelim.

En dıştaki dairenin yarıçapı $|OC| = 5r$ olduğundan $A_2 = \pi(5r)^2 = 25\pi r^2$dir.

Buradan $\frac{A_1}{A_2} = \frac{4\pi r^2}{25\pi r^2} = \frac{4}{25}$ bulunur.

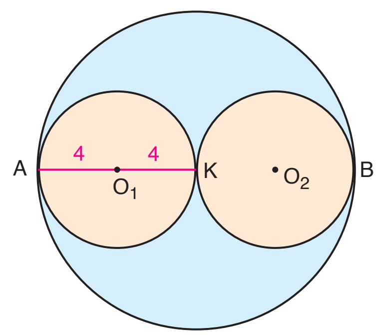
Örnek

Yarıçapının uzunluğu 4 cm olan özdeş O_1 ve O_2 merkezli daireler K noktasında birbirlerine, A ve B noktalarında büyük daireye teğettir. Buna göre mavi boyalı bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulalım.



Çözüm

Küçük daireler özdeş ve teğet olduklarından K noktası büyük dairenin merkezidir. O_1 merkezli dairenin çapını çizersek $[AK]$, büyük dairenin yarıçapıdır. Küçük dairenin yarıçapının uzunluğu 4 cm olduğundan büyük dairenin yarıçapı $|AK| = 8$ cm'dir.



O_1 merkezli dairenin alanı A_1

O_2 merkezli dairenin alanı A_2

Büyük dairenin alanı A_3 olsun. Buradan

$$\begin{aligned}\text{Mavi boyalı alan} &= A_3 - (A_1 + A_2) \\ &= \pi \cdot 8^2 - (\pi \cdot 4^2 + \pi \cdot 4^2) \\ &= 64\pi - (16\pi + 16\pi) \\ &= 64\pi - 32\pi \\ &= 32\pi \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Örnek

Türk tarihi başarılarla doludur. Türkler, Asya'dan Avrupa'ya uzanan geniş coğrafyada birçok devlet kurmuş ve tarih sahnesinde hep var olmuştur. Bugüne kadar 16 Türk devleti kurulmuştur. 17. Türk devleti ise Türkiye Cumhuriyeti'dir.

Bir okulun tarih sınıfının dörder metre boyutlarındaki duvarına, aşağıdaki gibi 16 Türk devletinin bayrakları 24 cm yarıçaplı eş dairelere yerleştirilmiş, ortadaki 60 cm yarıçaplı daireye ise Türk bayrağı konulmuştur. Buna göre bu duvarda, bayraklardan arta kalan bölgenin alanının kaç m^2 olduğunu bulalım ($\pi \approx 3{,}14$ alalım.).



Çözüm

Türk bayrağının içinde olduğu dairenin alanı $= \pi \cdot r^2$

$= 3{,}14 \cdot (0{,}6)^2$ (60 cm = 0,6 m)

$= 3{,}14 \cdot 0{,}36 \approx 1{,}13\ m^2$

1 küçük dairenin alanı $= \pi \cdot (0{,}24)^2$ (24 cm = 0,24 m)

$= 3{,}14 \cdot 0{,}0576 \approx 0{,}18\ m^2$ olur.

16 tane dairenin alanı $= 16 \cdot 0{,}18 \approx 2{,}88\ m^2$ olur.

Dairelerden arta kalan bölgenin alanı = Duvarın alanı – (dairelerin toplam alanı)

$= 4 \cdot 4 - (2{,}88 + 1{,}13)$

$= 16 - 4{,}01 = 11{,}99 \approx 12\ m^2$ bulunur.

Daire Diliminin Alanı

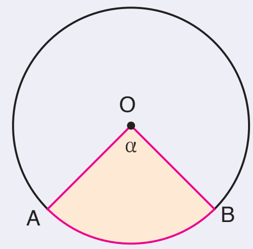
Bilgi

Bir dairenin iki yarıçapı ile bu yarıçapların belirttiği yay arasında kalan bölgeye **daire dilimi** denir.

$[OA]$, $[OB]$ ve $\overset{\frown}{AB}$ ile sınırlanan bölge daire dilimidir.

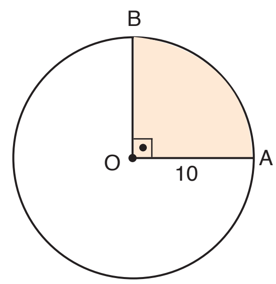
Yarıçapı r ve merkez açısının ölçüsü α olan daire diliminin alanı

$A_D = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$ olur.



Örnek

Şekildeki O merkezli dairede A ve B noktaları dairenin üzerindedir. $m(\widehat{AOB}) = 90°$, $|OA| = 10$ cm olduğuna göre boyalı bölgenin alanını bulalım.



Çözüm

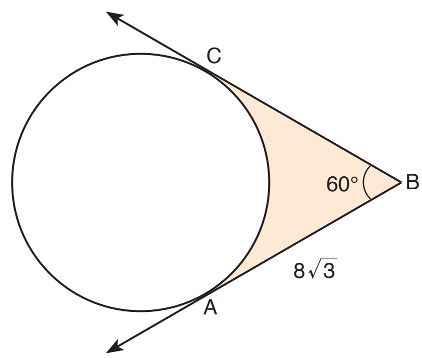
$|OA| = 10$ cm ve $m(\widehat{AOB}) = 90°$ olduğundan boyalı bölgenin alanı (A_D)

$A_D = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} = \pi \cdot 10^2 \cdot \frac{90°}{360°} = 25\pi$ cm² bulunur.

Örnek

Yandaki dairede $[BC$, C noktasında; $[BA$, A noktasında daireye teğettir.

$m(\widehat{ABC}) = 60°$, $|AB| = 8\sqrt{3}$ cm olduğuna göre boyalı bölgenin alanın kaç cm² olduğunu bulalım.



Çözüm

O dairenin merkezi olsun.

$[OC]$, $[OA]$ yarıçaplarını çizersek

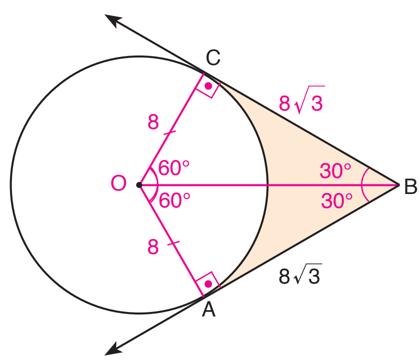
$[OA] \perp [AB]$ ve $[OC] \perp [BC]$ olur.

Teğet parçaları eşit olduğundan

$|AB| = |BC| = 8\sqrt{3}$ .....(I)

$|OC| = |OA|$ (yarıçap) .....(II)

Yarıçaplar değme noktalarında teğetlere diktir.



$[OB]$ çizilirse (I) ve (II) den $[OB]$ aynı zamanda açıortay olur (K.A.K eşlik kuralı).

OCB ve OAB, 30° - 60° - 90° özel dik üçgenlerdir. Buradan $|OC| = |OA| = 8$ cm olur.

$A(\widehat{OAB}) = A(\widehat{OCB}) = \dfrac{8 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}\ cm^2$

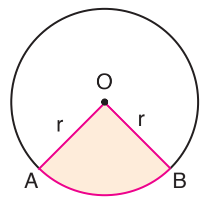
$A_D = \pi r^2 \cdot \dfrac{\alpha}{360} = \pi \cdot 8^2 \cdot \dfrac{120°}{360°} = \dfrac{64\pi}{3}\ cm^2$ olur. Buradan

boyalı bölgenin alanı, $A(\widehat{OCB}) + A(\widehat{OAB}) - A_D = 32\sqrt{3} + 32\sqrt{3} - \dfrac{64\pi}{3}$

$= 64\sqrt{3} - \dfrac{64\pi}{3}\ cm^2$ bulunur.

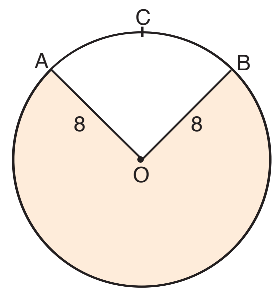
Bilgi

Daire diliminin gördüğü yay $\overset{\frown}{AB}$ ve yarıçap r olmak üzere daire diliminin alanı $A_D = \dfrac{|\overset{\frown}{AB}| \cdot r}{2}$ olur.



Örnek

O merkezli dairenin yarıçapının uzunluğu 8 cm, $|\overset{\frown}{ACB}| = 4\pi$ cm olduğuna göre boyalı daire diliminin alanını bulalım.



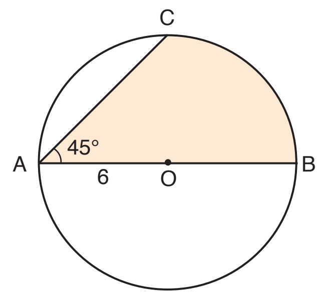
Çözüm

$A_D = \dfrac{|\overset{\frown}{ACB}| \cdot r}{2} = \dfrac{4\pi \cdot 8}{2} = 16\pi\ cm^2$ olur.

Boyalı bölgenin alanı$= \pi r^2 - A_D = \pi \cdot 8^2 - 16\pi = 64\pi - 16\pi = 48\pi\ cm^2$ bulunur.

Örnek

O merkezli dairenin yarıçapının uzunluğu 6 cm, [AB] çap, C noktası çemberin üzerinde ve $m(\widehat{BAC}) = 45°$ olduğuna göre boyalı bölgenin alanını bulalım.



Çözüm

[OC] nı çizersek $|AO| = |OC| = 6$ cm olur.

Buradan $\widehat{AOC}$ ikizkenar üçgen olacağından

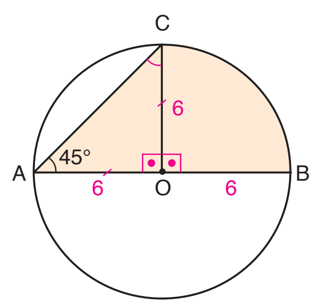
$[OC] \perp [AO]$ elde edilir.

Boyalı bölgenin alanı $= A(\widehat{AOC}) + A_D$

$= \dfrac{|OC| \cdot |AO|}{2} + \pi r^2 \cdot \dfrac{\alpha}{360°}$

$= \dfrac{6 \cdot 6}{2} + \pi 6^2 \cdot \dfrac{90°}{360°}$

$= 18 + 9\pi\ cm^2$ bulunur.



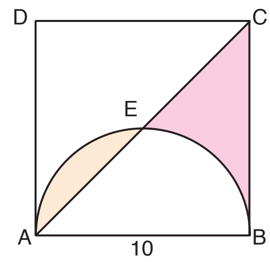
Örnek

ABCD karesinde, E noktası; karenin köşegeni ile çemberin kesim noktasıdır.

[AB] yarım dairenin çapı ve

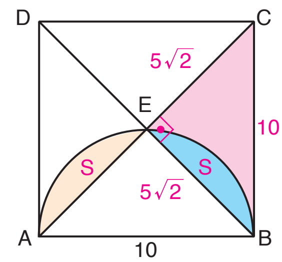
$|AB| = 10$ cm ise

boyalı alanlar toplamının kaç cm^2 olduğunu bulalım.



Çözüm

[BD] köşegeni çizilirse oluşan daire parçalarının alanları birbirine eşittir. Sarı boyalı daire parçasının alanı, mavi boyalı daire parçasının alanına eşittir. Pembe ve mavi boyalı bölgelerin toplam alanının BEC üçgeninin alanı olduğu görülür. ABCD karesinde köşegenler diktir ve birbirini ortalayarak kesişir.



$|AB| = 10$ cm ise

$|AC| = 10\sqrt{2}$ cm olur.

O hâlde $|BE| = |EC| = 5\sqrt{2}$ cm olur. Buradan

$$A(\widehat{BEC}) = \frac{|BE| \cdot |EC|}{2} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}}{2} = 25 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

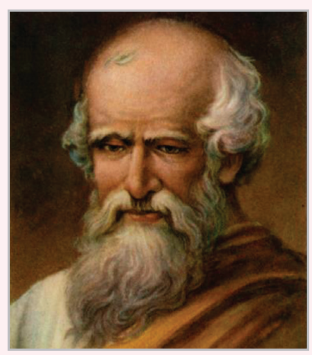
E-İçerik

Bir başka yoldan $A(\widehat{BEC}) = \frac{A(ABCD)}{4} = \frac{10 \cdot 10}{4} = \frac{100}{4} = 25 \text{ cm}^2$ bulunur.

Okuma Metni

Archimedes (Arşimet, MÖ 287-212)

Eski Çağ'ın en büyük matematikçisi ve mucidi olan Archimedes, Sicilya Adası'nda bir Yunan kenti olan Siracusa'da doğdu. Öklid'in MÖ yaklaşık 300'de, Mısır'ın İskenderiye şehrinde kurduğu okulda öğrenim gördükten sonra Siracusa'ya dönerek geometri ile uğraştı. Bilgisini, günlük yaşamda karşılaştığı sorunların çözümünde uygulayarak mühendisliği sağlam matematiksel temellere oturtan ilk bilim insanı olmuştur.

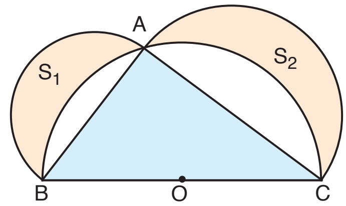


Archimedes (temsilî)

Yunanlı bir matematikçi ve mucit olan Archimedes, suyun çıkartılması için spiral bir pompa icat etmiştir. Archimedes vidası olarak adlandırılan bu pompa hâlen kullanılmaktadır. Kürenin hacmini, kürenin büyük çemberini bulmaya yarayan çeşitli hesaplamalar ve formüller bulmuştur. Archimedes, sıvıların kaldırma gücü esasları üzerinde yaptığı çalışmalar ile daha çok ünlüdür. Rivayete göre Archimedes, küvette yıkanırken suyun, vücudunu kaldırdığını fark etmiş ve bu sayede suyun kaldırma kuvvetini bulmuştur.

Genel ağdan alınmıştır.

Örnek

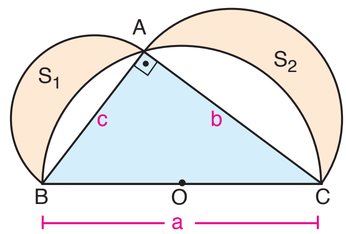


Şekilde $\widehat{ABC}$ nin $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarını çap kabul eden yarım daireler ile $[BC]$ kenarını çap kabul eden ve A köşesinden geçen yarım daire çizilmiştir.

S_1 ve S_2 bulundukları bölgelerin alanları olsun.

Buna göre $S_1 + S_2 = A(\widehat{ABC})$ olduğunu gösterelim.

Çözüm



$\widehat{BAC}$ çapı gördüğünden $m(\widehat{BAC}) = 90°$ olur. $\widehat{ABC}$ dik üçgen olduğundan $a^2 = b^2 + c^2$ ve $A(\widehat{ABC}) = \frac{b \cdot c}{2}$ olur.

$|BC| = a, |AB| = c, |AC| = b$ yarım dairelerin çap uzunluklarıdır.

O hâlde yarıçap uzunukları $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$ ve $\frac{c}{2}$ olur.

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left[\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}b \cdot c\right]$$

$$= \frac{1}{2}\pi\frac{c^2}{4} + \frac{1}{2}\pi\frac{b^2}{4} - \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{a^2}{4} + \frac{1}{2}b \cdot c$$

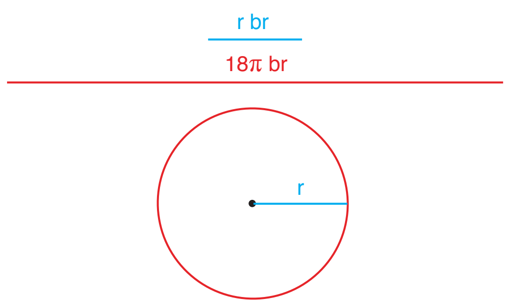
$$= \frac{\pi}{8}(c^2 + b^2 - a^2) + \frac{b \cdot c}{2} \quad (a^2 = b^2 + c^2 \text{ olduğundan})$$

$$= \frac{\pi}{8}(a^2 - a^2) + \frac{b \cdot c}{2}$$

$$= \frac{b \cdot c}{2} = A(\widehat{ABC}) \text{ bulunur.}$$

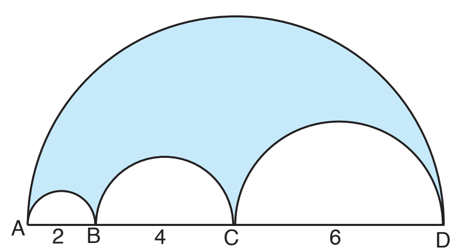
Alıştırmalar 5-4

1. Yanda verilen kırmızı ve mavi iki tel parçasının uzunlukları üzerine yazılmıştır.
   Kırmızı telin bir ucu mavi telin bir ucu ile kaynatılıp yarıçapının uzunluğu r br olan bir çember yapılmıştır.
   Buna göre r'nin değerini bulunuz.

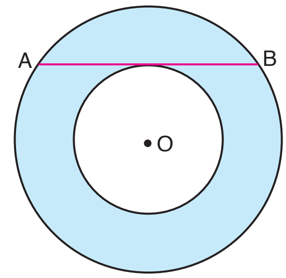


2. Yarıçapının uzunluğu 9 cm olan bir dairede merkez açısı α olan bir yayın uzunluğu 2π cm'dir. Buna göre α kaç derecedir?

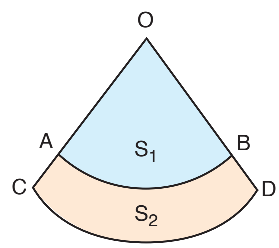
3. Yanda $[AB], [BC], [CD]$ ve $[AD]$ çaplı yarım daireler verilmiştir. $|AB| = 2$ cm, $|BC| = 4$ cm, $|CD| = 6$ cm olduğuna göre boyalı bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



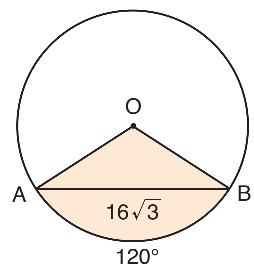
4. Şekilde O merkezli iki daire verilmiştir.
A ve B noktaları büyük dairenin üzerindedir.
$[AB]$ küçük daireye teğettir. $|AB| = 2a$ br
olduğuna göre boyalı bölgenin alanını
a türünden bulunuz.



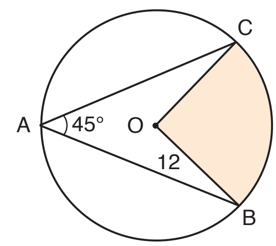
5. Şekildeki daire dilimlerinin ortak merkezi, O noktasıdır. $|OB| = 6|BD|$, S_1 ve S_2 bulundukları bölgelerin alanları olmak üzere $\frac{S_1}{S_2}$ oranını bulunuz.



6. Şekilde O merkezli dairede A ve B noktaları çember üzerindedir. $|AB| = 16\sqrt{3}$ cm, $m(\widehat{AB}) = 120°$ olduğuna göre daire diliminin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



7. O merkezli dairede A, B ve C noktası çember üzerindedir. $|OB| = 12$ cm, $m(\widehat{BAC}) = 45°$ olduğuna göre OBC daire diliminin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



8. Bir pastacı çap uzunlukları 20, 24 ve 30 cm den üç dairesel pastayı merkezleri aynı hizada olacak olacak şekilde üst üste dizerek yandaki üç katlı doğum günü pastasını hazırlamıştır. Pastanın orta katı mavi hamurla, diğer iki katı pembe hamurla kaplanmıştır. Bu pastaya üstten bakıldında görünen pembe yüzeylerin alanı, görünen mavi yüzeylerin alanından kaç cm^2 fazladır?



A) 118π B) 127π C) 130π D) 137π E) 140π

5. DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Aşağıdaki noktalı yerlere uygun ifadeleri yazarak cümleleri tamamlayınız.

a) Çemberde .... kirişlerin arasında kalan yayların ölçüleri eşittir.

b) Uzunlukları eşit iki kirişin uç noktaları arasında kalan .... ölçüleri eşittir.

c) Bir doğrunun bir çemberin merkezine uzaklığı, yarıçap uzunluğundan küçük ise doğru ile çember .... kesişir.

ç) Düzlemde sabit bir noktaya sabit uzaklıktaki tüm noktaların kümesine .... denir.

2. Aşağıdaki cümlelerin başındaki kutucuğa ifade doğruysa "D", yanlışsa "Y" yazınız.

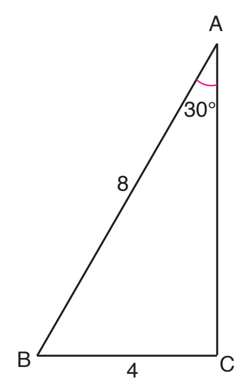
a) ☐ Bir doğru ile bir çemberin tek bir noktası ortak ise bu doğruya teğet doğrusu denir.

b) ☐ 4r br yarıçaplı bir çemberin çevresi $4\pi r$ br olur.

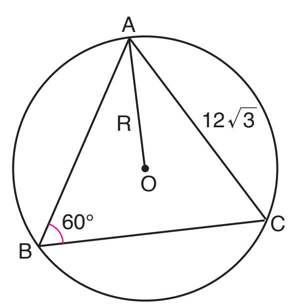
c) ☐ Herhangi bir çemberde 90° lik merkez açının gördüğü yayın uzunluğu, çemberin çevre uzunluğunun yarısı kadardır.

ç) ☐ Çemberin teğetine değme noktasında çizilen yarıçap bu teğete dik olur.

3. Yandaki $\widehat{ABC}$ nde $[BC] \perp [AC]$, $|AB| = 8$ br, $|BC| = 4$ br verilmiştir.
Bu üçgenin iç teğet ve dış teğet çemberlerini, dinamik matematik yazılımında çiziniz. Üçgenin köşelerinden sürükleme yaparak oluşan durumu yorumlayınız.



4. Şekilde O merkezli çember, $\widehat{ABC}$ nin çevrel çemberidir.
$|AC| = 12\sqrt{3}$ cm ve $m(\widehat{ABC}) = 60°$ olduğuna göre
$|AO| = R$ kaç cm'dir?



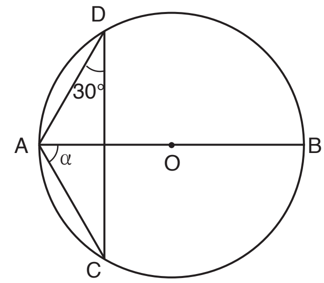
A) 8 B) $8\sqrt{3}$ C) 9 D) $9\sqrt{3}$ E) 12

5. O merkezli çemberde [AB] çaptır.

C ve D noktaları çember üzerindedir.

$m(\widehat{ADC}) = 30°$ ise

$m(\widehat{CAB}) = \alpha$ kaç derecedir?



A) 30° B) 45° C) 60° D) 75° E) 90°

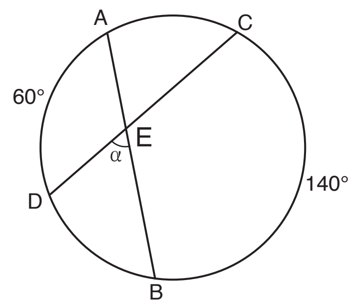
6. Şekildeki çemberde A, B, C ve D noktaları çember üzerindedir.

$[AB] \cap [CD] = \{E\}$,

$m(\widehat{AD}) = 60°$,

$m(\widehat{BC}) = 140°$ olduğuna göre

$m(\widehat{DEB}) = \alpha$ kaç derecedir?



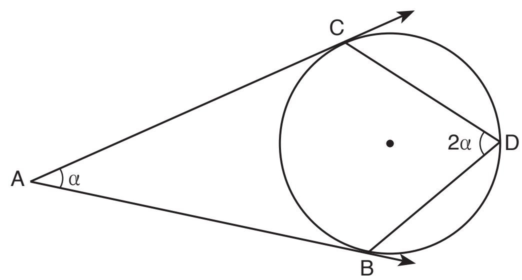
A) 100° B) 95° C) 90° D) 85° E) 80°

7. [AB ve [AC çembere B ve C noktalarında teğet,

D noktası çember üzerindedir.

$m(\widehat{BAC}) = \alpha$,

$m(\widehat{BDC}) = 2\alpha$ olduğuna göre α kaç derecedir?



A) 24° B) 30° C) 36° D) 48° E) 54°

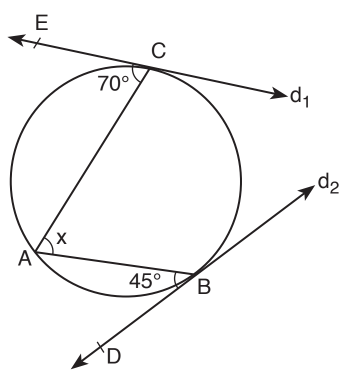
8. d_1 ve d_2 doğruları çembere C ve B noktalarında teğettir.

A noktası çember üzerindedir.

$m(\widehat{ABD}) = 45°$,

$m(\widehat{ACE}) = 70°$ olduğuna göre

$m(\widehat{BAC}) = x$ kaç derecedir?



A) 65° B) 70° C) 75° D) 80° E) 85°

9. Saat şimdi 13.45'tir. 3 saat 50 dakika sonra akrep ile yelkovan arasında oluşan merkez açının ölçüsü ile ilgili aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?



A) 40° den küçüktür.

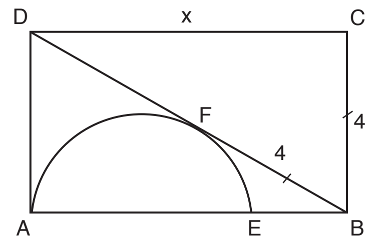
B) 50° ile 60° arasındadır.

C) 60°dir.

D) 70° den büyüktür.

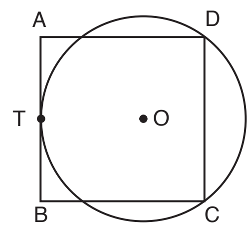
E) 60° ile 70° arasındadır.

10. ABCD dikdörtgen, [BD] köşegeni çembere F noktasında teğet, |AE| çemberin çapı, |BF| = |BC| = 4 cm olduğuna göre |DC| = x kaç cm'dir?



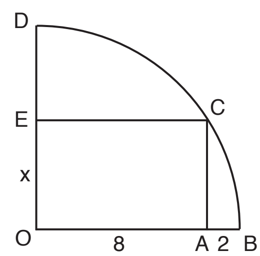
A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

11. ABCD karesinin [AB] kenarı, O merkezli çembere T noktasında teğet, D ve C noktaları çember üzerindedir. |AD| = 12 cm olduğuna göre çemberin yarıçapının uzunluğu kaç cm'dir?



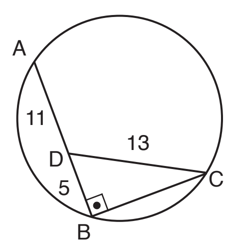
A) 9 B) 8 C) $\frac{15}{2}$ D) 7 E) $\frac{13}{2}$

12. Şekildeki O merkezli çeyrek çemberde OACE dikdörtgendir. Dikdörtgenin A ve E köşeleri çemberin yarıçapının üzerinde, C köşesi çember üzerindedir. |OA| = 8 cm, |AB| = 2 cm olduğuna göre |OE| = x kaç cm'dir?



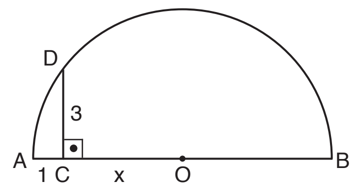
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

13. Yandaki çemberde A, B ve C noktaları çember üzerinde, $D \in [AB]$, $[AB] \perp [BC]$, |AD| = 11 cm, |BD| = 5 cm, |DC| = 13 cm olduğuna göre çemberin yarıçapının uzunluğu kaç cm'dir?



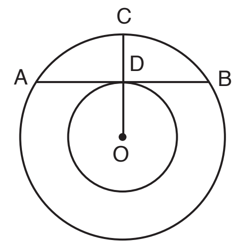
A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

14. Şekilde verilen yarım çemberin çapı [AB] ve [DC] ⊥ [AB] dır. D noktası çemberin üzerindedir.
|AC| = 1 cm, |DC| = 3 cm ise |OC| = x kaç cm'dir?



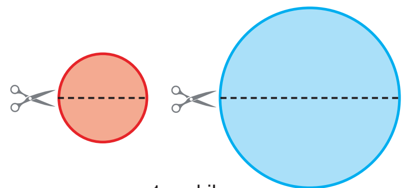
A) 3 B) 4 C) 5 D) 5 E) 7

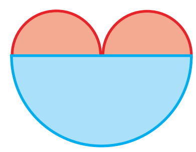
15. Şekilde çemberlerin merkezi O noktası ve C noktası büyük çemberin üzerindedir. [AB] kirişi içteki çembere D noktasında teğettir. |AB| = 24 cm, |OD| = 5 cm olduğuna göre büyük çemberin yarıçapının uzunluğu kaç cm'dir?



A) 13 B) 12 C) 11 D) 10 E) 9

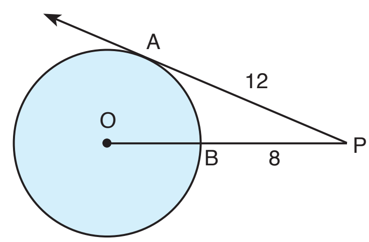
16. Kalp şeklinde bir logo tasarlamak isteyen Selin 1. şekildeki gibi kırmızı ve mavi çember şeklindeki kartonu işaretli yerden kesiyor.
Elde ettiği dört parçadan iki kırmızı ve bir mavi yarım çember ile 2. şekildeki logoyu yapmıştır.
Başlangıçtaki kırmızı çemberin çapının uzunluğunun 4 cm olduğu bilindiğine göre 2. şekildeki logonun çevresinin uzunluğu kaç cm'dir?


1. şekil


2. şekil

A) 5π B) 6π C) 7π D) 8π E) 9π

17. Şekilde [PA, O merkezli daireye teğettir.
|PB| = 8 cm, |PA| = 12 cm olduğuna göre dairenin alanı kaç cm²dir?



A) 27π B) 25π C) 23π D) 21π E) 19π

18. Bir dairenin çevresinin uzunluğu k ise dairenin alanının k cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

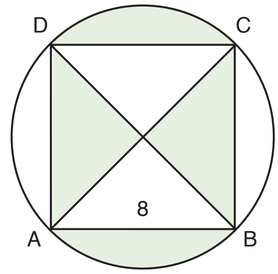
A) $\frac{k^2}{\pi}$ B) $\frac{k^2}{3\pi}$ C) $\frac{k^2}{4\pi}$ D) $\frac{k}{2\pi}$ E) $\frac{k}{\pi}$

19. Aşağıda çevre uzunlukları verilen dairelerden hangisinin çevresinin uzunluğu alanına eşittir?

A) π B) 2π C) 33π D) 4π E) 5π

20. Şekilde ABCD karesinin köşelerinden geçen daire çizilmiştir.

$|AB| = 8$ cm olduğuna göre boyalı alanlar toplamı kaç cm²dir?



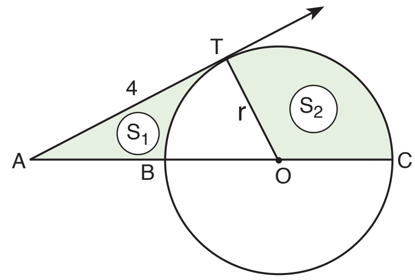
A) 16π B) 20π C) 24π
D) 30π E) 32π

21. O merkezli dairede T noktası teğet değme noktasıdır.

S_1 ve S_2 bulundukları bölgenin alanları, $[AC]$ kesen,

$|AT| = 4$ cm , $S_1 = S_2$ dir.

Buna göre $|OT| = r$ kaç cm'dir?



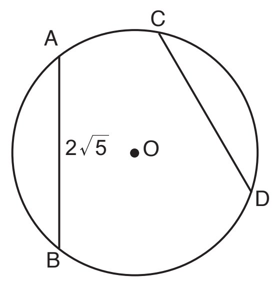
A) $\frac{\pi}{2}$ B) 2π C) $\frac{4}{\pi}$
D) 4π E) 8π

22. O merkezli çemberde

$|AB| = 2\sqrt{5}$ cm, $|CD| = 4$ cm,

$m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{CD}) = 180^\circ$ olduğuna göre

çemberin yarıçapının uzunluğu kaç cm'dir?



A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

23. Matematik dersinde yapılan bir etkinlikte aşağıdaki adımlar uygulanmıştır.

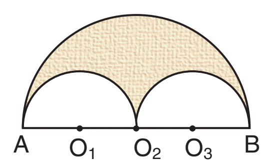
I. $(AB \perp CD)$ olacak şekilde dik kesişen iki doğru çiziniz. Kesişen noktayı O olarak adlandırınız.
II. AB doğrusuna O noktasında teğet ve CO doğrusunu E noktasında kesen bir çember çiziniz.
III. CD doğrusuna O noktasında teğet ve AB doğrusunu F noktasında kesen bir çember daha çiziniz.
IV. Çemberlerin kesim noktalarından birini O, diğerini de K olarak adlandırınız.

$|KF| = 4$ cm, $|KE| = 9$ cm olduğuna göre $|OK|$ kaç cm'dir?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

24. Şekilde O_1, O_2 ve O_3 yarım daireleri veriliyor.

$|AB| = 8$ cm ise taralı bölgenin alanı kaç santimetrekaredir?



A) 7π B) 6π C) 5π
D) 4π E) 3π

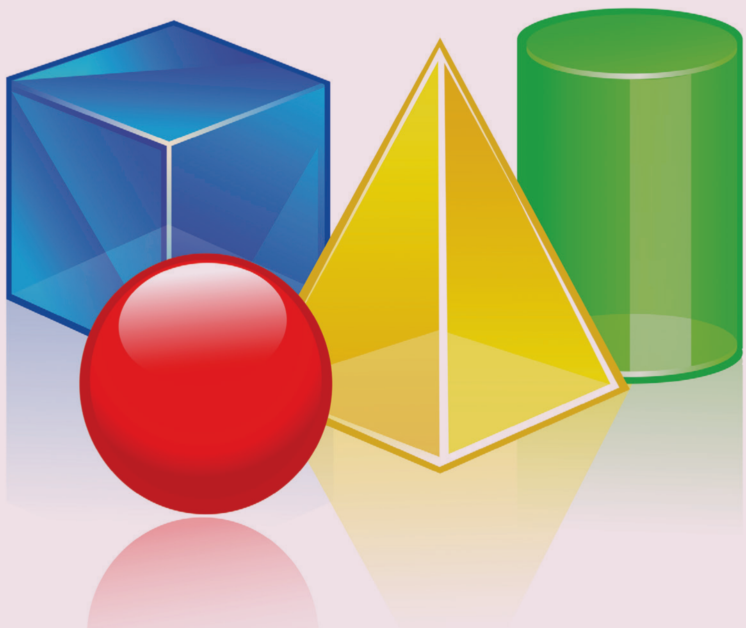
Ölçme ve Değerlendirme Soruları

6

KATI CİSİMLER

Bu bölümde;

- Küre, dik dairesel silindir ve dik dairesel koninin alan ve hacim bağıntılarını oluşturarak işlemler yapmayı öğreneceksiniz.

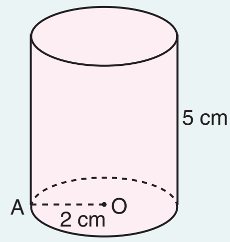


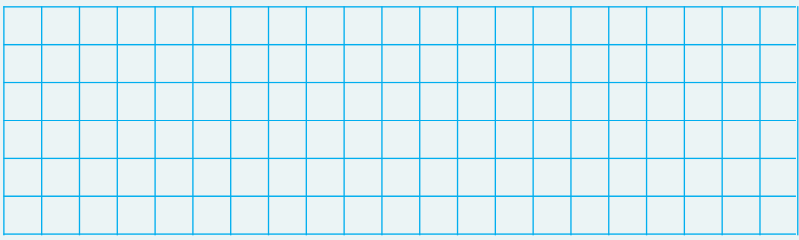
Terimler ve Semboller

Terimler ve Kavramlar: dik dairesel silindir, dik dairesel koni, küre, ana doğru, tepe noktası

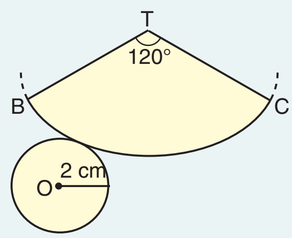
Hazırlık Çalışması

1. Yanda verilen dik dairesel silindirin taban merkezi O, yarıçapının uzunluğu 2 cm ve yüksekliği 5 cm'dir. Buna göre bu dik dairesel silindirin açınımını çiziniz ($\pi \approx 3,14$ alınız.).





2. Yandaki şekilde T merkezli çemberde $m(\widehat{BTC}) = 120°$ ve $|\widehat{BC}|$, O merkezli çemberin çevre uzunluğuna eşittir. O merkezli çemberin yarıçapının uzunluğu 2 cm olduğuna göre T merkezli çemberin yarıçapının uzunluğunu bulunuz ($\pi \approx 3,14$ alınız.).



6.1. KATI CİSİMLER

6.1.1. Dik Dairesel Silindir, Dik Dairesel Koni ve Kürenin Alan ve Hacim Bağıntıları



EXPO 2017 Astana Uluslararası Fuar Bürosu, Astana/Kazakistan



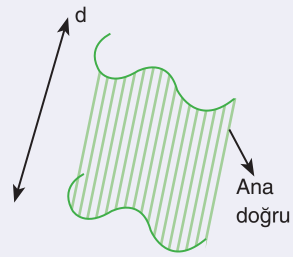
Galata Kulesi/İstanbul

Silindir ve küresel şeklindeki yapılar binaların görünümüne estetik katmaktadır.
Siz de çevrenizden bu gibi yapılar araştırınız.

Dik Dairesel Silindir

Bilgi

Uzayda bir eğri ile bu eğrinin düzlemine paralel olmayan bir d doğrusu verildiğinde, eğriye dayanarak hareket eden ve d doğrusuna paralel olan doğruların oluşturduğu yüzeye **silindirik yüzey** denir.



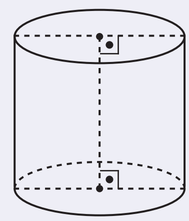
Eğriye dayanarak hareket eden doğruya **ana doğru** denir.

Dayanak eğrisi kapalı bir eğri olan silindirik bir yüzeyin ana doğrularını kesen ve birbirine paralel iki düzlemle silindirik yüzey arasında kalan cisme **silindir** adı verilir.

Paralel düzlemlerin silindirik yüzey içinde kalan parçalarına **silindirin tabanları** denir. Tabanların çevrelerini birleştiren eğri yüzeyine **silindirin yanal yüzeyi** denir. Tabanlar arasındaki uzaklığa **silindirin yüksekliği** denir.

Silindirler tabanlarıyla isimlendirilir. Tabanı daire olan silindire, **dairesel silindir** adı verilir.

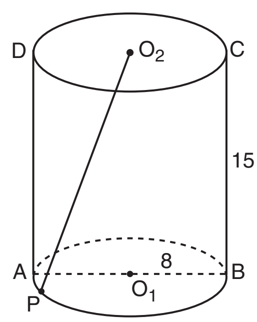
Ana doğrusu tabana dik olan dairesel silindirlere **dik dairesel silindir** veya **dönel silindir** denir.



Dik dairesel silindir

Örnek

Taban merkezleri O_1 ve O_2 olan dik dairesel silindirin tabanı üzerinde bir P noktası alınmıştır. Silindirin taban yarıçapının uzunluğu 8 cm ve yüksekliği $|CB| = 15$ cm olduğuna göre $|O_2P|$ nun kaç cm olduğunu bulalım.



Çözüm

O_2 merkezinden O_1 merkezine bir dikme inelim.

$|CB| = 15$ cm olduğundan $|O_1O_2| = 15$ cm olur.

$[PO_1]$ yarıçap olduğundan $|PO_1| = 8$ cm olur.

PO_1O_2 dik üçgeninde Pisagor teoremini uygularsak

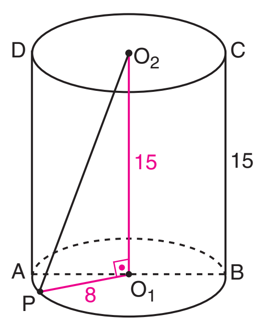
$|PO_2|^2 = |PO_1|^2 + |O_2O_1|^2$

$|PO_2|^2 = 8^2 + 15^2$

$|PO_2|^2 = 64 + 225$

$|PO_2|^2 = 289$

$|PO_2| = 17$ cm bulunur.



Dik Dairesel Silindirin Yüzey Alanı

Bilgi

Yanda dik dairesel silindir ve altında silindirin açınımı verilmiştir.

Silindirin yan yüzeyi bir dikdörtgendir. Dikdörtgenin uzun kenarının uzunluğu, silindir tabanının çevresinin uzunluğuna eşittir. Kısa kenarının uzunluğu ise silindirin yüksekliğine eşittir.

Buradan silindirin yanal alanı,

Y_A = Taban çevresi · Yükseklik

$Y_A = 2\pi rh$ olur.

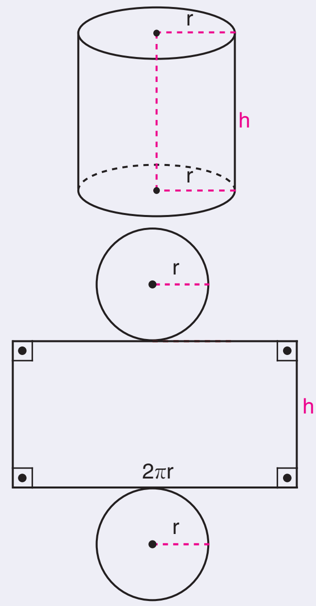
$T_A = \pi r^2$ olur.

Dik dairesel silindirin yüzey alanı,

$A = Y_A + 2 \cdot T_A$

$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$

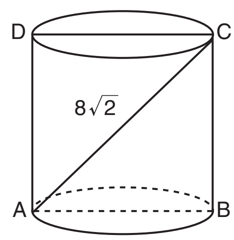
$A = 2\pi r\,(h + r)$ bulunur.



Örnek

Şekildeki dik dairesel silindirde

ABCD kare, $|AC| = 8\sqrt{2}$ cm olduğuna göre silindirin yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulalım.



Çözüm

ABCD kare olduğundan $|AB| = |BC|$ olur.

$\widehat{ABC}$ ikizkenar dik üçgendir. Öyleyse

$|AC| = 8\sqrt{2}$ cm ise $|AB| = |BC| = 8$ cm olur.

$[AB]$ çap olduğundan taban yarıçapının uzunluğu $r = 4$ cm olur.

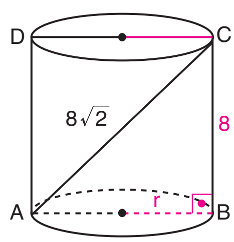
Buradan

$A = Y_A + T_A = 2\pi r(h + r)$

$A = 2\pi 4 \cdot (8 + 4)$

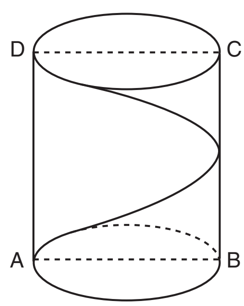
$A = 8\pi \cdot 12$

$A = 96\pi$ cm^2 bulunur.



Örnek

Yandaki dik dairesel silindirin taban çevresinin uzunluğu 12 br dir. A noktasından silindirin yüzeyi üzerinden dolaşarak D noktasına gidecek bir hareketlinin izleyebileceği en kısa yolun uzunluğu 13 br olduğuna göre silindirin taban alanının ve yüzey alanının kaç br^2 olduğunu bulalım ($\pi \approx 3,14$ alalım.).



Çözüm

Silindirin açınımı yandaki gibi olur. İki nokta arasındaki en kısa uzaklık düzlemde doğru belirtir. Silindirin taban çevresinin uzunluğu 12 br olduğundan $|AA|' = 12$ br olur.

$\widehat{AA'D}$ dik üçgen olduğundan $|DA'| = 5$ br bulunur.

(5 - 12 - 13 özel dik üçgeni)

Silindirin taban çevresinin uzunluğu 12 br olduğundan

$|AA'| = 2\pi r$

$12 = 2 \cdot 3,14 \cdot r$

$r = \dfrac{6}{3,14} \approx 1,9$ br olur.

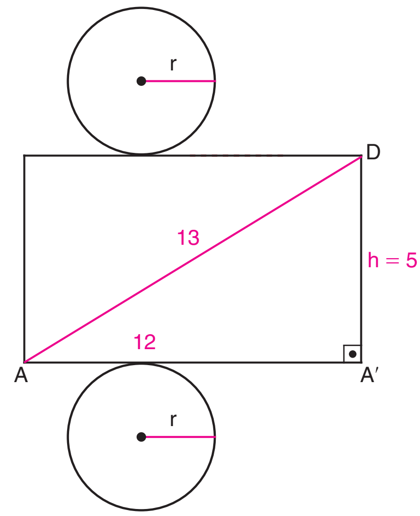
Silindirin yüzey alanı,

$A = 2\pi r(h + r)$

$A = 2 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot (5 + 2) = 87,92$ br^2 olur.

Silindirin taban alanı,

$T_A = \pi r^2 = 3,14 \cdot 2^2 = 12,56$ br^2 bulunur.



E-İçerik

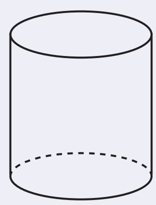
Dik Dairesel Silindirin Hacmi

Bilgi

Dik dairesel silindirin hacmi,

Hacim = Taban alanı · Yükseklik

$V = \pi r^2 h$ olur.



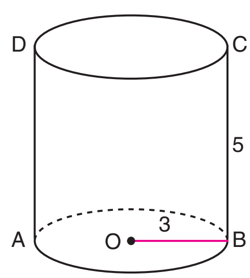
Örnek

Yandaki şekilde verilen dik dairesel silindirde,

$|OB| = 3$ cm,

$|BC| = 5$ cm olduğuna göre

silindirin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulalım.



Çözüm

Verilen dik dairesel silindirin yarıçapının uzunluğu

$r = 3$ cm ve yüksekliği $h = 5$ cm olur.

Silindirin hacmi, $V = \pi r^2 \cdot h$

$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 5$

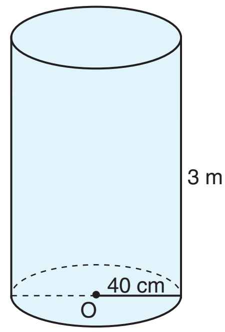
$V = 45\pi$ cm^3 bulunur.

Örnek



Silindir biçimindeki bir yakıt tankının taban yarıçapının uzunluğu 40 cm ve yatay uzunluğu 3 m'dir. Günde 30 litre yakıt tüketen bir aracın, yakıt tankı tam dolu iken bu yakıtın kaç gün yeteceğini bulalım ($\pi \approx 3,14$ alalım. $1000\ cm^3 = 1$ litredir.).

Çözüm



Yakıt tankı yatay verilmiştir ve dikey olarak dik dairesel silindir şeklindedir.

Dik dairesel silindirin yüksekliği $h = 3\ m = 300\ cm$ olur.

Yakıt tankının hacmi

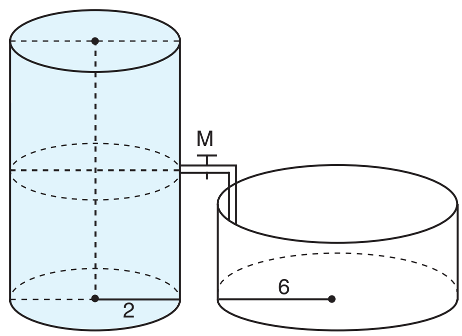
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 40^2 \cdot 300 = 1\ 507\ 200\ cm^3$ olur.

$1\ 507\ 200\ cm^3 = 1507,2$ litredir.

$\frac{1507,2}{30} \approx 50,2$ olur.

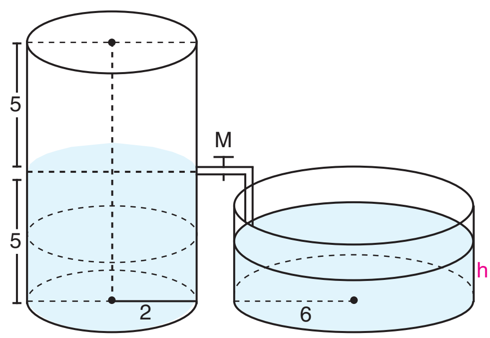
Buradan bu tankerdeki yakıtın araca yaklaşık 50 gün yeteceği bulunur.

Örnek



Şekil 1 de taban yarıçapının uzunluğu 2 cm ve yüksekliği 10 cm olan dik dairesel silindir su ile doludur. Silindirin tam ortasında bulunan M musluğu açılarak içindeki suyun şekil 2 deki taban yarıçapının uzunluğu 6 cm olan dik dairesel silindire boşaltılması sağlanıyor. Buna göre şekil 2 deki suyun son yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulalım.

Çözüm



Şekil 1 deki suyun hacmi, silindirin hacmine eşittir. M musluk açılınca musluk silindirin tam ortasında bulunduğundan silindir içindeki suyun yarısı şekil 2 deki silindire dökülür. Dolayısıyla şekil 2 de bulunan su miktarı,

$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{2} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 10}{2} = 20\pi\ cm^3$ tür.

Şekil 2 deki su bulunduğu tabana yayılacağından

$20\pi = \pi 6^2 \cdot h$ olur. Bu suyun son yüksekliği,

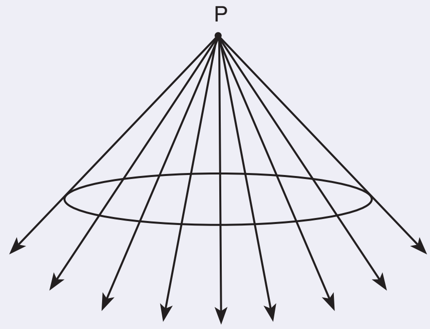
$20\not{\pi} = 36\not{\pi} h = h = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$ cm bulunur.

E-İçerik

Dik Dairesel Koni

Bilgi

Uzayda kapalı bir eğri ile sabit bir P noktası verilsin. P noktası ile eğrinin her noktasından geçen doğruların oluşturduğu yüzeye **konik yüzey** denir.

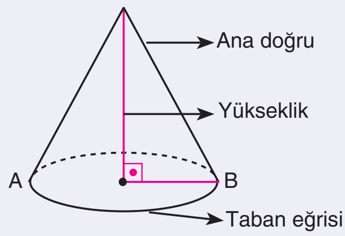


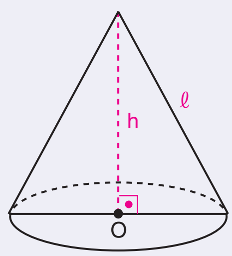
P noktası tepe noktasıdır. Verilen eğrinin taban eğrisi veya dayanak eğrisi, P noktasından geçen ve konik yüzeyi oluşturan doğrulara **konik yüzeyinin ana doğruları** denir.

Konik yüzeyin tüm ana doğrularını kesen bir düzlemle tepe noktası arasında kalan cisme **koni** denir.

Koninin tepe noktası ve eksenini içine alan her düzlem ile kesişimi bir üçgensel bölgedir.

Yükseklik ayağı taban merkezinde olan koniye **dik koni**, tabanı daire olan dik koniye **dik dairesel koni** denir.





Dik dairesel koni

Dik dairesel konide, ana doğruların uzunlukları eşittir. Yükseklik simetri eksenidir. Simetri ekseninden geçen düzlemler ile koninin ara kesitleri eş ikizkenar üçgensel bölgelerdir.

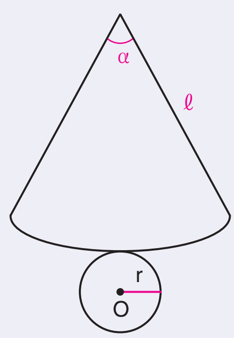
Bir dairesel koninin tabanına paralel bir düzlemle ara kesiti yine bir daire olur.

ℓ yarıçaplı daire diliminin merkez açısı α olsun. Buradan daire yayının uzunluğu $2\pi\ell \cdot \frac{\alpha}{360°}$ olur. (1)

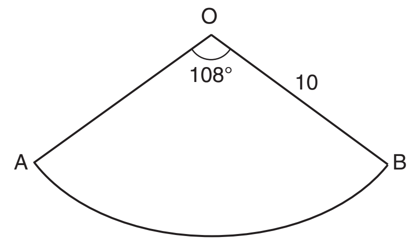
ℓ yarıçaplı daire yayının uzunluğu r yarıçaplı dairenin çevresine eşittir. O hâlde daire yayının uzunluğu $2\pi r$ olur. (2)

(1) ve (2) den $2\pi\ell \cdot \frac{\alpha}{360°} = 2\pi r$

$\frac{r}{\ell} = \frac{\alpha}{360°}$ bulunur.



Örnek



Yandaki O merkezli daire diliminde,

$m(\widehat{AOB}) = 108°$, $|OB| = 10$ cm olarak veriliyor.

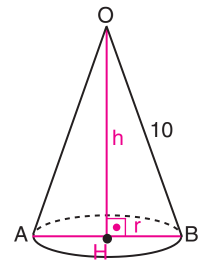
Bu daire dilimi kıvrılarak dik dairesel koni hâline getiriliyor.

Koninin yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulalım.

Çözüm

$[OB]$ oluşan koninin ana doğrusudur. Oluşan koninin yarıçapı r olmak üzere

$$\frac{r}{\ell} = \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow \frac{r}{|OB|} = \frac{m(\widehat{AOB})}{360°} \Rightarrow \frac{r}{10} = \frac{108°}{360°} \Rightarrow 360°r = 1080° \Rightarrow r = 3 \text{ cm olur.}$$



OHB dik üçgeninde Pisagor teoremini uygularsak

$$|OH|^2 + |HB|^2 = |BO|^2$$

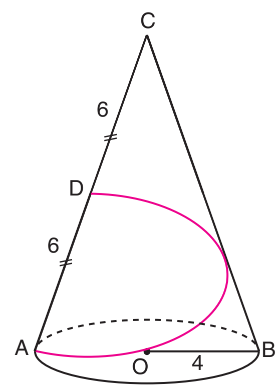
$$h^2 + r^2 = \ell^2$$

$$h^2 + 3^2 = 10^2$$

$$h^2 + 9 = 100$$

$$h = \sqrt{91} \text{ cm olur.}$$

Örnek



Yandaki taban merkezi O olan dik dairesel konide

$|OB| = 4$ cm, $|AD| = |DC| = 6$ cm olarak veriliyor.

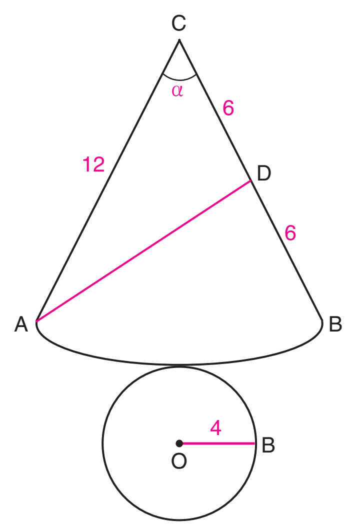
A dan hareketle koninin yüzeyinden D noktasına olan en kısa uzaklığın kaç cm olduğunu bulalım.

Çözüm

Dik koninin açınımı yandaki gibi olur. İki nokta arasındaki en kısa uzaklık, doğru belirtir.

$$\frac{|OB|}{|AC|} = \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow 12\alpha = 4 \cdot 360°$$

$$\alpha = 120° \text{ olur.}$$



$\widehat{ACD}$ nde kosinüs teoremini uygularsak

$$|AD|^2 = |AC|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |CD| \cdot \cos\alpha$$

$$|AD|^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \text{Cos}120°$$

$$|AD|^2 = 144 + 36 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

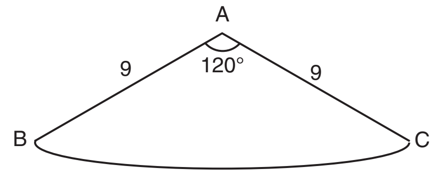
$$|AD|^2 = 180 + 72$$

$$|AD|^2 = 252 \Rightarrow |AD| = 6\sqrt{7} \text{ cm olur.}$$

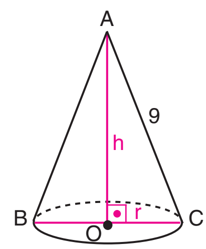
Örnek

Yandaki A merkezli daire dilimi kıvrılarak dik dairesel koni elde ediliyor. $m(\widehat{BAC}) = 120°$, $|AB| = |AC| = 9$ br dir.

Oluşan koninin yüksekliğini ve taban yarıçapının uzunluğunun kaç br olduğunu bulalım.



Çözüm



$$\frac{r}{\ell} = \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow \frac{r}{9} = \frac{120°}{360°}$$

$$3r = 9$$

$$r = 3 \text{ br olur.}$$

$[AO]$ koninin yüksekliğidir.

AOC dik üçgeninde Pisagor teoremini uygularsak

$$|AO|^2 + |OC|^2 = |AC|^2 \text{ ise } h^2 + 3^2 = 9^2$$

$$h^2 + 9 = 81$$

$$h^2 = 72$$

$$h = 6\sqrt{2} \text{ br olur.}$$

Dik Dairesel Koninin Yüzey Alanı

Bilgi

Yanda bir koni ve bu koninin açınımı verilmiştir.

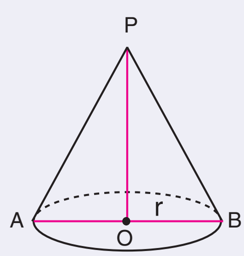
Koninin yanal alanı,

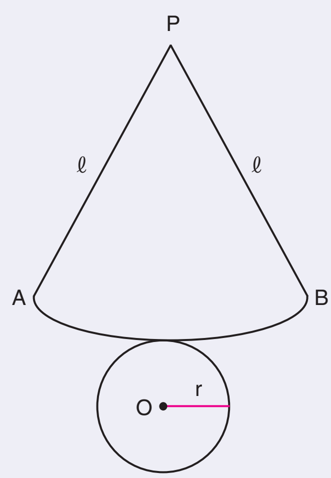
$$Y_A = \frac{|AB| \cdot |PB|}{2} \quad (|AB| \text{ taban çevresidir.})$$

$$Y_A = \frac{2\pi r \cdot \ell}{2}$$

$Y_A = \pi r \ell$ dir.

$T_A = \pi r^2$ dir.





Koninin yüzey alanı,

$$A = Y_A + T_A$$

$$A = \pi r \ell + \pi r^2$$

$A = \pi r(\ell + r)$ bulunur.

Örnek

Yarıçapının uzunluğu 6 cm, yüksekliği 8 cm olan dik dairesel koninin yanal alanının kaç cm^2 olduğunu bulalım.

Çözüm

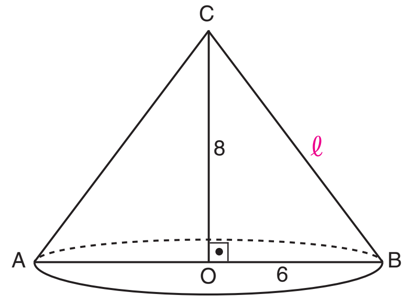
Yüksekliği h = 8 cm, taban yarıçapının uzunluğu r = 6 cm olduğuna göre $|CB| = \ell$ ana doğrusunun uzunluğunu bulalım.

COB dik üçgeninde Pisagor teoremini uygularsak

$$|CO|^2 + |OB|^2 = |CB|^2$$
$$h^2 + r^2 = \ell^2$$
$$8^2 + 6^2 = \ell^2$$
$$\ell^2 = 64 + 36$$
$$\ell^2 = 100$$
$$\ell = 10 \text{ cm olur.}$$

Koninin yanal alanı,

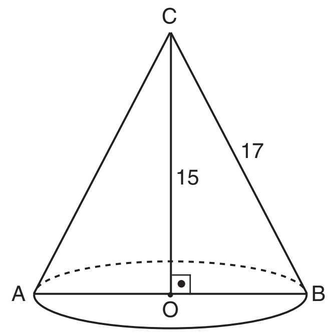
$$Y_A = \pi r \ell$$
$$Y_A = \pi \cdot 6 \cdot 10$$
$$Y_A = 60\pi \text{ cm}^2\text{dir.}$$



Örnek

Taban merkezi O olan dik dairesel konide

$|CO| = 15$ cm, $|CB| = 17$ cm olduğuna göre bu koninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulalım.

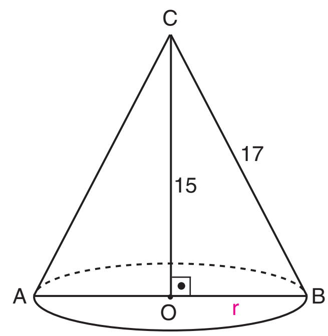


Çözüm

[CO] dik dairesel koninin yüksekliği, [CB] ana doğrusu olduğuna göre [OB] yarıçapının uzunluğunu bulalım.

COB dik üçgeninde Pisagor teoremini uygularsak

$$|CO|^2 + |OB|^2 = |CB|^2$$
$$15^2 + r^2 = 17^2$$
$$225 + r^2 = 289$$
$$r^2 = 64$$
$$r = 8 \text{ cm olur.}$$



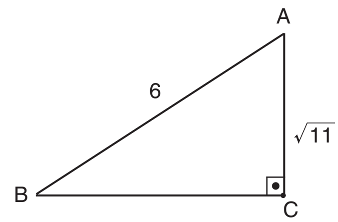
Dik dairesel koninin yüzey alanı,

$$A = \pi r(\ell + r)$$
$$A = \pi \cdot 8(17 + 8)$$
$$A = \pi \cdot 8 \cdot 25$$
$$A = 200\pi \text{ cm}^2 \text{ olur.}$$

Örnek

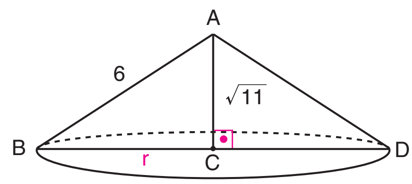
Yandaki ABC dik üçgeninde $|AB| = 6$ cm $|AC| = \sqrt{11}$ cm olarak veriliyor.

ABC dik üçgeni $[AC]$ etrafında 360° döndürülerek elde edilen cismin yanal alanının taban alanına oranını bulalım.



Çözüm

ABC üçgeni $[AC]$ etrafında 360° döndürülürse yandaki dik dairesel koni oluşur. $[BC]$ yarıçaptır.



ABC dik üçgeninde Pisagor teoremini uygularsak

$|BC|^2 + |AC|^2 = |AB|^2$

$r^2 + (\sqrt{11})^2 = 6^2$

$r^2 + 11 = 36$

$r^2 = 25$

$r = 5$ cm olur.

Dik dairesel koninin yanal alanı,

$Y_A = \pi r \ell$

$Y_A = \pi \cdot 5 \cdot 6$

$Y_A = 30\pi$ cm²dir.

Dik dairesel koninin taban alanı,

$T_A = \pi r^2$

$T_A = \pi \cdot 5^2$

$T_A = 25\pi$ olur.

O hâlde yanal alanın taban alanına oranı,

$\frac{Y_A}{T_A} = \frac{30\pi}{25\pi} = \frac{6}{5}$ bulunur.

Dairesel Koninin Hacmi

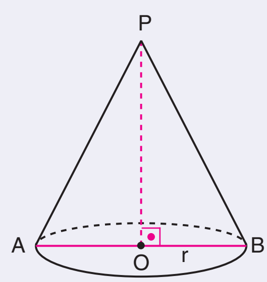
Bilgi

Dik dairesel koninin hacmi,

Hacim $= \frac{1}{3}$ Taban alanı · Yükseklik

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$

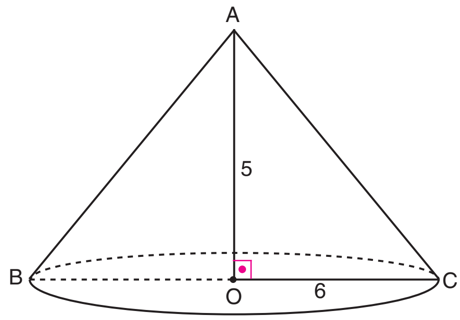
$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ olur.



Örnek

Taban yarıçapının uzunluğu 6 cm, yüksekliği 5 cm olan dik dairesel koninin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulalım.

Çözüm



Dairesel koninin hacmi

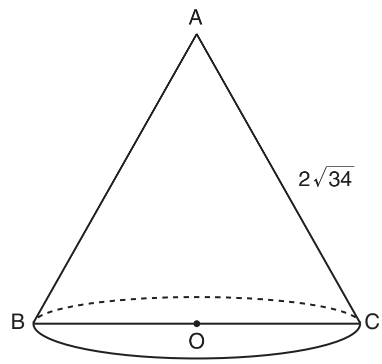
$V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$ olduğundan

$V = \dfrac{\pi \cdot 6^2 \cdot 5}{3}$

$V = \dfrac{\pi \cdot 36 \cdot 5}{3}$

$V = 60\pi\ cm^3$ bulunur.

Örnek

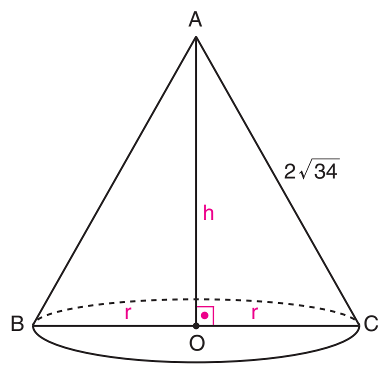


Yandaki dik dairesel konide $|AC| = 2\sqrt{34}$ cm,

$[BC]$ çap, $A(\widehat{ABC}) = 60\ cm^2$ olarak veriliyor.

Koninin yüksekliği, taban yarıçapından küçük bir tam sayıdır. Buna göre dik koninin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulalım.

Çözüm



$A(\widehat{ABC}) = \dfrac{|BC| \cdot |AO|}{2} = 60\ cm^2$ ise

$\dfrac{h \cdot 2r}{2} = 60$

$h \cdot r = 60$ olur.

AOC dik üçgeninde Pisagor teoremini uygularsak

$|AO|^2 + |OC|^2 = |AC|^2$

$h^2 + r^2 = (2\sqrt{34})^2$

$h^2 + r^2 = 136 \Rightarrow (h + r)^2 - 2hr = 136$

$(h + r)^2 - 2 \cdot 60 = 136$

$(h + r)^2 = 256$

$h + r = 16$ olur.

$h < r$, $h + r = 16$ ve $h \cdot r = 60$ ise

$h = 6$ cm, $r = 10$ cm olur.

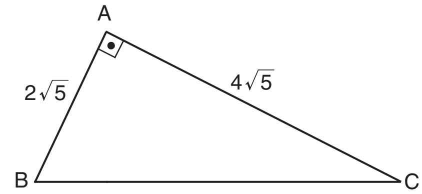
Dik dairesel koninin hacmi, $V = \dfrac{\pi r^2 \cdot h}{3}$

$V = \dfrac{\pi \cdot 10^2 \cdot 6}{3}$

$V = 200\pi\ cm^3$ bulunur.

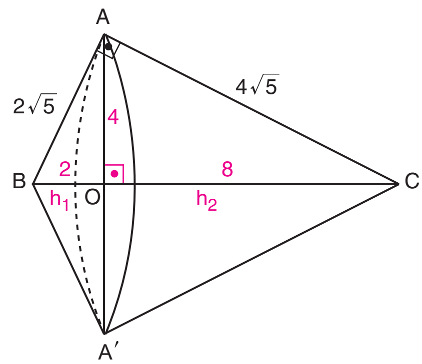
Örnek

Yandaki $\widehat{ABC}$ nde $[AB] \perp [AC]$, $|AB| = 2\sqrt{5}$ cm, $|AC| = 4\sqrt{5}$ cm'dir. ABC dik üçgeni $[BC]$ etrafında 360° döndürülürse elde edilen cismin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulalım.



Çözüm

ABC dik üçgeni $[BC]$ etrafında 360° döndürülürse yandaki şekil elde edilir. Bu cisim, tabanları eş iki dik konidir.



ABC dik üçgeninde Pisagor teoremini uygularsak

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$$

$$(2\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{5})^2 = |BC|^2$$

$$20 + 80 = |BC|^2$$

$$|BC|^2 = 100$$

$|BC| = 10$ cm olur.

$[AO] \perp [BC]$ olduğundan ABC dik üçgeninde Öklid teoremini uygularsak

$$|AB|^2 = |BO| \cdot |BC|$$

$$(2\sqrt{5})^2 = |BO| \cdot 10$$

$20 = |BO| \cdot 10 \Rightarrow |BO| = 2$ cm olur.

O hâlde $|BC| = 10$ cm olduğundan $|OC| = 8$ cm'dir.

$$|AO|^2 = |BO| \cdot |OC|$$

$$|AO|^2 = 2 \cdot 8$$

$|AO| = 4$ cm olur.

Bu durumda konilerin taban yarıçaplarının uzunluğu 4 cm'dir.

Konilerin hacmi, V_1 ve V_2 olmak üzere

$$V_1 = \frac{\pi r^2 \cdot h_1}{3} = \frac{\pi 4^2 \cdot 2}{3} = \frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3$$

$$V_2 = \frac{\pi r^2 \cdot h_2}{3} = \frac{\pi 4^2 \cdot 8}{3} = \frac{128\pi}{3} \text{ cm}^3 \text{ olur.}$$

Oluşan cismin hacmi,

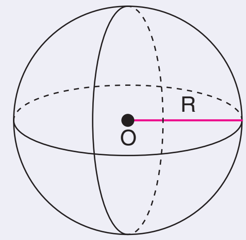
$$V_1 + V_2 = \frac{32\pi}{3} + \frac{128\pi}{3} = \frac{160\pi}{3} \text{ cm}^3 \text{ bulunur.}$$

Küre

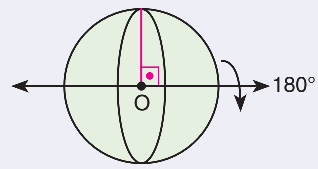
Bilgi

Uzayda sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine **küre yüzeyi**, küre yüzeyi ile sınırlanan cisme de **küre** adı verilir.

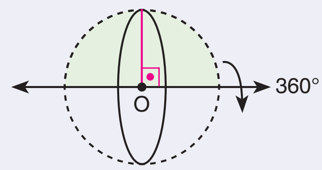
Bu sabit noktaya **kürenin merkezi**, küre merkezinin küre yüzeyine olan uzaklığına da **kürenin yarıçapı** denir.



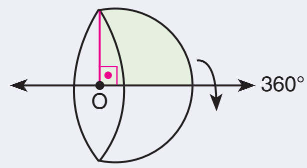
• Bir daire, kendi çapı etrafında 180° döndürüldüğünde bir küre oluşur.



• Bir yarım daire, kendi çapı etrafında 360° döndürüldüğünde bir küre oluşur.



• Bir çeyrek daire, kendi yarıçapı etrafında 360° döndürüldüğünde bir yarım küre oluşur.



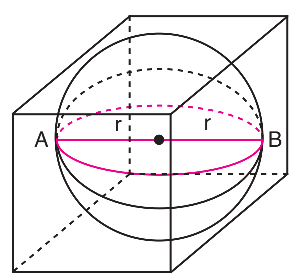
Örnek

Bir ayrıtının uzunluğu 8 cm olan bir küpün içine yerleştirilebilecek en büyük hacimli kürenin yarıçapının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulalım.

Çözüm

Küpün içine çizilebilecek en büyük hacimli küre, küpün yüzlerine teğet olan küredir. Bu durumda kürenin çapı, küpün ayrıt uzunluğu kadardır. Kürenin yarıçapına r dersek

$|AB| = 2r = 8 \text{ cm} \Rightarrow r = 4 \text{ cm}$ olur.

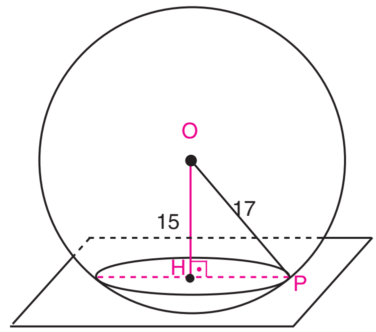


Örnek

Yarıçapının uzunluğu 17 cm olan bir küre, merkezinden 15 cm uzaklıkta bir düzlemle kesiliyor. Küre ile düzlemin ara kesiti olan şeklin alanının kaç cm^2 olduğunu bulalım.

Çözüm

Küre ile bir düzlemin ara kesiti dairedir.



Kürenin yarıçapının uzunluğu 17 cm ve düzlemin kürenin merkezine uzaklığı 15 cm ise OHP dik üçgeninde Pisagor teoremini uygularsak

$|OH|^2 + |HP|^2 = |OP|^2$

$15^2 + |HP|^2 = 17^2$

$225 + |HP|^2 = 289$

$|HP|^2 = 64$

$|HP| = 8$ cm olur.

O hâlde ara kesit olan dairenin yarıçapının uzunluğu 8 cm'dir. Yarıçapının uzunluğu 8 cm olan dairenin alanı,

$A = \pi r^2$

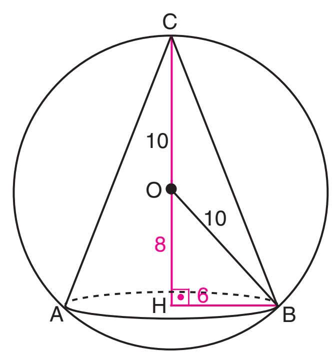
$A = \pi 8^2$

$A = 64\pi$ cm^2 bulunur.

Örnek

Yarıçapının uzunluğu 10 cm olan bir kürenin merkezinden 8 cm uzaklıktaki kesitini taban kabul eden en büyük hacimli koninin yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulalım.

Çözüm



OHB dik üçgen (6 - 8 - 10 özel dik üçgeni)

$|OB| = 10$, $|OH| = 8$ cm olduğundan $|HB| = 6$ cm'dir.

(6-8-10 özel dik üçgeni). Bu durumda koninin yüksekliği,

$|CH| = 18$ cm ve yarıçapının uzunluğu $|HB| = 6$ cm'dir. BCH dik üçgeninde Pisagor teoremini uygularsak

$|CB|^2 = |CH|^2 + |BH|^2$

$= 18^2 + 6^2$

$= 360$

$\ell = |CB| = 6\sqrt{10}$ cm olur.

Koninin alanı,

$A = \pi \cdot r \cdot (\ell + r)$

$= \pi \cdot 6 \cdot (6\sqrt{10} + 6)$

$= 36\sqrt{10}\,\pi + 36\pi$

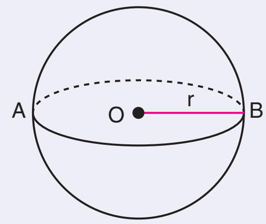
$36\pi(\sqrt{10} + 1)$ cm^{2}dir.

Kürenin Alanı

Bilgi

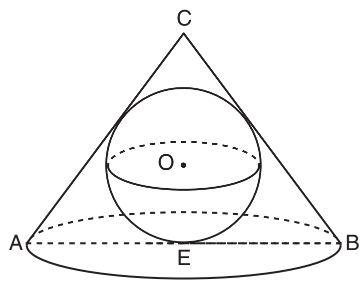
Yarıçapının uzunluğu r br olan kürenin alanı,

$A = 4\pi r^2$ olur.



Örnek

Yandaki şekilde taban yarıçapının uzunluğu 6 cm ve yüksekliği 8 cm olan dik koninin içine yüzeylerine teğet olacak şekilde bir küre yerleştiriliyor. Buna göre bu kürenin yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulalım.



Çözüm

Küre, koninin yüzeylerine teğet olduğundan yarıçaplar değme noktasında koninin ana doğrusuna diktir.

Taban yarıçapının uzunluğu 6 cm olduğundan

$|FB| = |BE| = 6$ cm'dir. (Teğet parçalarının uzunlukları eşittir.).

$\widehat{CEB}$ dik üçgen ve $|CE| = 8$ cm ve $|EB| = 6$ cm olduğundan $|BC| = 10$ cm'dir (6 - 8 - 10 dik üçgeni).

$|BF| = 6$ cm ise $|CF| = 4$ cm'dir.

CFO dik üçgeninde Pisagor teoremini uygularsak

$|OF|^2 + |CF|^2 = |OC|^2$

$r^2 + 4^2 = (8 - r)^2$

$r^2 + 16 = 64 - 16r + r^2$

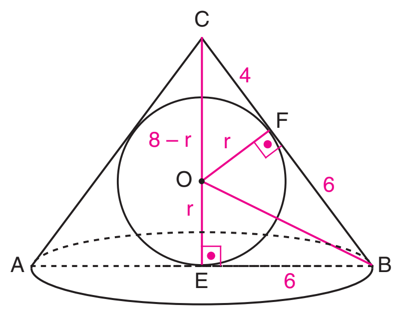
$16r = 48$

$r = 3$ cm olur. Buradan kürenin alanı,

$A = 4\pi r^2$

$A = 4\pi 3^2$

$A = 36\pi\ cm^2$ bulunur.

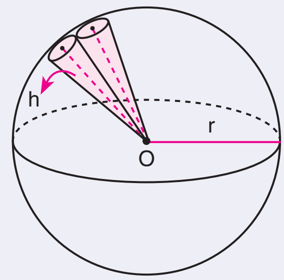


Kürenin Hacmi

Bilgi

Tabanı küre yüzeyinde, ucu kürenin merkezinde olacak şekilde konilerle bir kürenin tüm yüzeyi kaplanır.

Bu konilerden bir tanesinin taban alanı A ve kürenin yüzeyi n tane koni ile tamamen kaplanıyorsa $n \cdot A = 4\pi r^2$ dir (Kürenin yüzey alanı $4\pi r^2$). Bir koninin yüksekliği h, kürenin yarıçapı r ise h = r dir.



Bu konilerden birinin hacmi,

$V_k = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h$ olur.

n tane koninin hacmi,

$V_n = n \cdot \frac{1}{3} \cdot A \cdot h$

$V_n = \frac{1}{3} \cdot n \cdot A \cdot h$ olur.

$nA = 4\pi r^2$ ve $h = r$ olduğundan $V_n = \frac{1}{3} 4\pi r^2 \cdot r \Rightarrow V_n = \frac{4\pi r^3}{3}$'tür.

n tane koninin toplam hacmi kürenin hacmine eşit olduğundan,

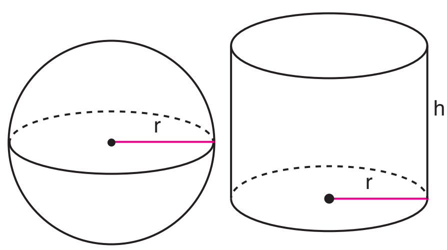
Kürenin hacmi $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ olur.

Örnek

Bir kürenin yarıçapı ile bir dik dairesel silindirin taban yarıçapının uzunlukları birbirine eşittir. Küre ve silindirin yüzey alanları birbirine eşit olduğuna göre silindirin hacminin kürenin hacmine oranını bulalım.

Çözüm

Kürenin yarıçapının uzunluğuna r dersek silindirin taban yarıçapının uzunluğu da r olur.



Kürenin yüzey alanı $A_K = 4\pi r^2$ dir.

Silindirin yüzey alanı $A_S = 2\pi rh + 2\pi r^2$ olur.

$A_K = A_S$ olduğundan

$4\pi r^2 = 2\pi rh + 2\pi r^2$

$2\pi rh = 2\pi r^2$

$h = r$ dir.

Kürenin hacmi, $V_K = \frac{4\pi r^3}{3}$,

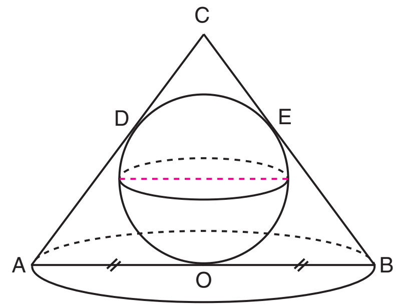
Silindirin hacmi, $V_S = \pi r^2 h$, $h = r$ olduğundan

$V_S = \pi r^3$ olur. O hâlde $\frac{V_S}{V_K} = \frac{\pi r^3}{\frac{4\pi r^3}{3}} = \frac{3\pi r^3}{4\pi r^3} = \frac{3}{4}$'tür.

Örnek

Şekildeki dik koninin içine O, D ve E noktalarında teğet olacak şekilde bir küre yerleştiriliyor. Koninin hacmi 1500π cm³,

$|AO| = |OB| = 15$ cm olduğuna göre kürenin hacminin kaç cm³ olduğunu bulalım.



Çözüm

Koninin hacmi, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$ ise

$\frac{1}{3}\pi \cdot 15^2 \cdot h = 1500\pi$

$75h = 1500$

$h = 20$ olur.

Kürenin merkezi K noktası ve kürenin yarıçapı r olsun.

COB dik üçgen (15 - 20 - 25 özel dik üçgeni), $|CO| = 20$ cm ve $|OB| = 15$ cm olduğundan $|CB| = 25$ cm olur.

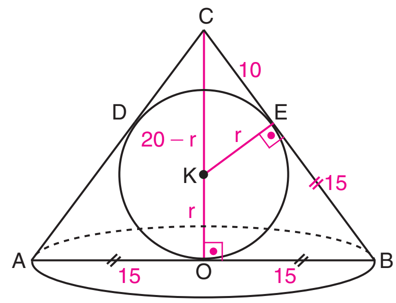
Buradan $|CE| = 10$ cm bulunur. CKE dik üçgeninde Pisagor teoremini uygularsak

$|KE|^2 + |CE|^2 = |CK|^2$

$r^2 + 10^2 = (20 - r)^2$

$r^2 + 10^2 = 400 - 40r + r^2$

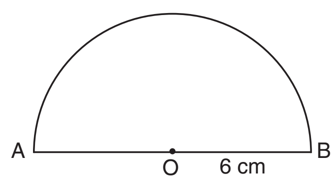
$40r = 300 \Rightarrow r = \frac{300}{40} = \frac{15}{2}$ cm olur.



Kürenin hacmi $V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot \left(\frac{15}{2}\right)^3}{3} = \frac{4\pi 15^3}{3 \cdot 2^3} = \frac{1125\pi}{2}$ cm³ bulunur.

Örnek

Şekildeki O merkezli yarım dairede $[AB]$ çap ve $|OB| = 6$ cm'dir. Yarım daire, çapı etrafında 360° döndürülüyor. Oluşan cismin hacminin kaç cm³ olduğunu bulalım.

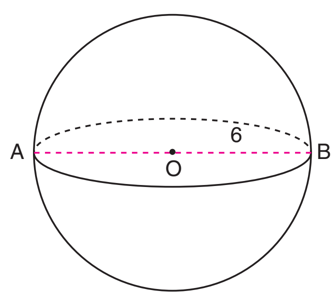


Çözüm

Yarıçapının uzunluğu 6 cm olan yarım daire, çapı etrafında 360° döndürülürse yarıçapı 6 cm olan küre oluşur. O hâlde kürenin hacmi,

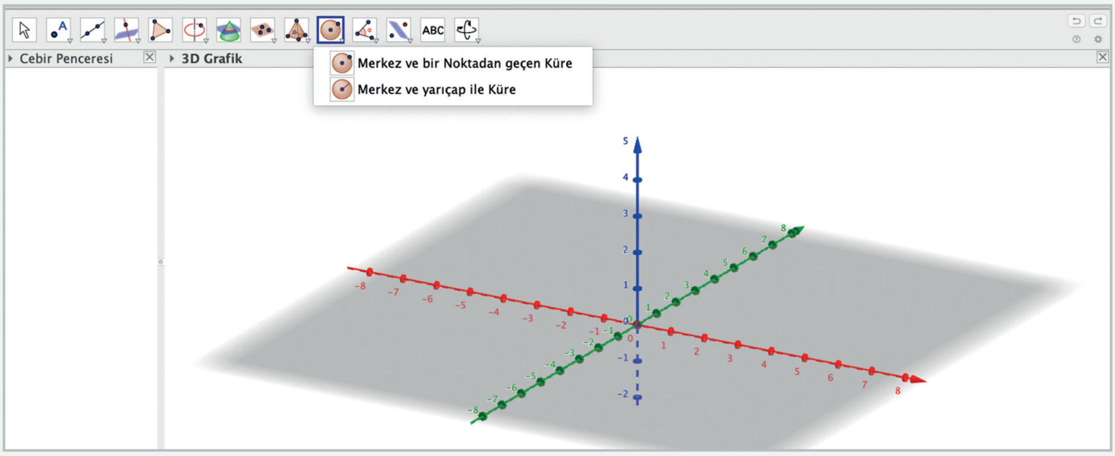
$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi 6^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 216}{3}$

$= 288\pi$ cm³tür.

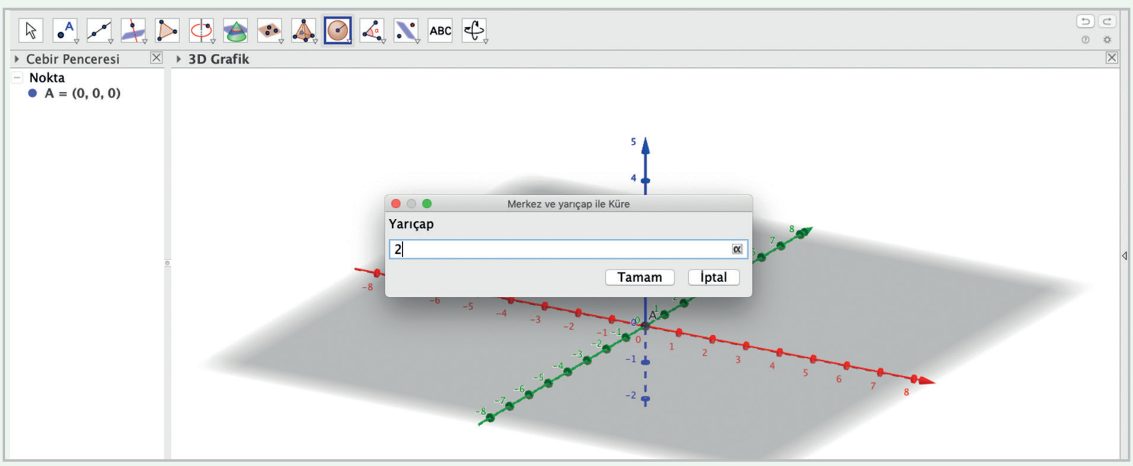


Bilgi-İletişim Teknolojisi

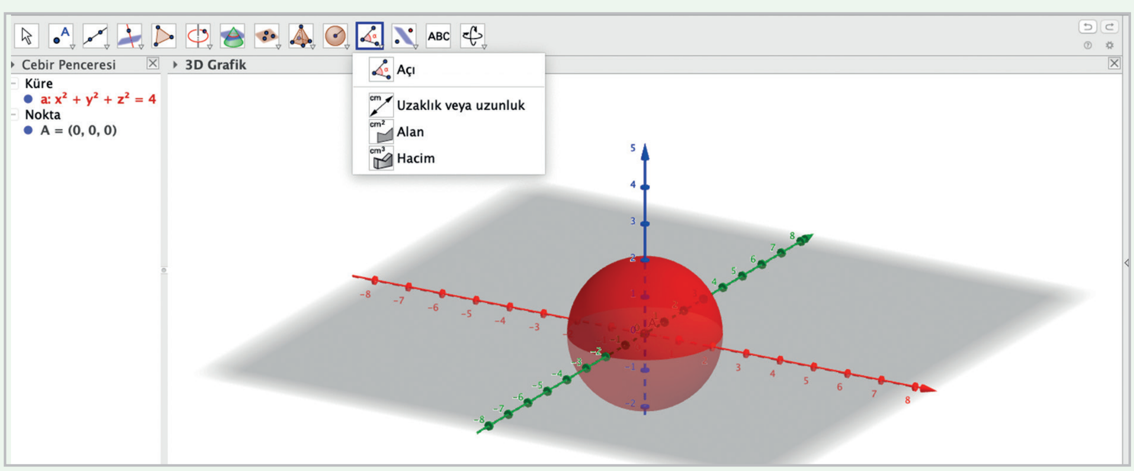
Dinamik matematik yazılımını çalıştıralım. Önce 3D Grafik menüsünü daha sonra Küre: Merkez ve Yarıçap ile Küre menüsünü seçelim.



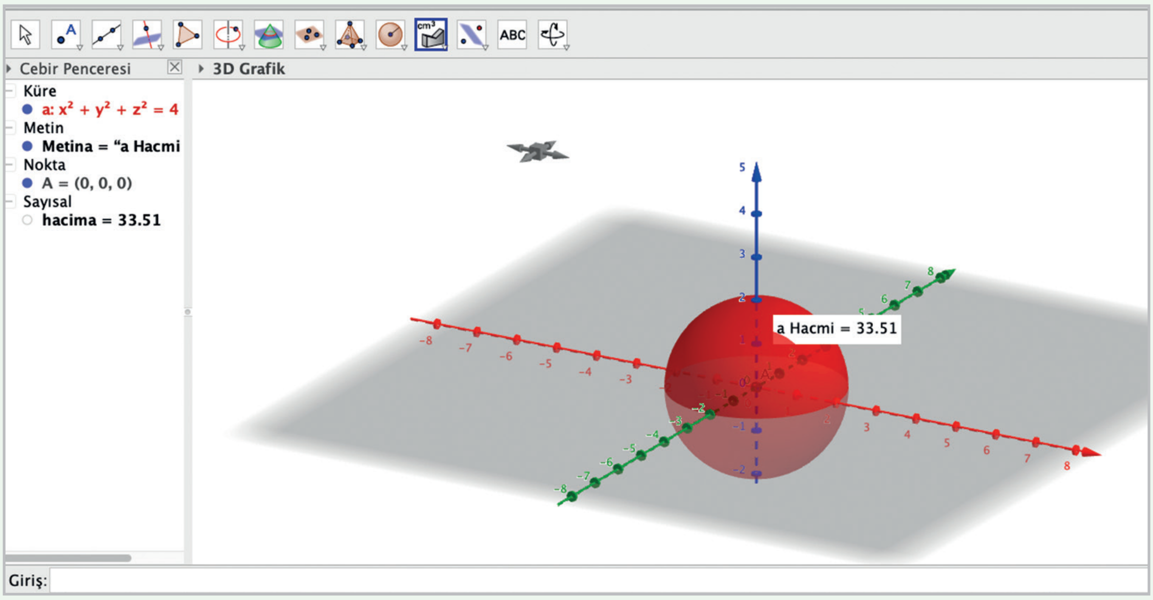
Orijine tıkladığımızda ekrana yarıçapı isteyen arayüz gelir. Yarıçap kısmına 2 yazıp Enter tuşuna basalım.



Ekrana bir küre görseli gelir. Açı menüsünden Hacim sekmesini seçelim.



Küre görseline tıkladığımızda kürenin hacim verisine ulaşmış oluruz.



Siz de farklı yarıçap değerleri vererek istediğiniz kürenin hacmini bulabilirsiniz.

Örnek

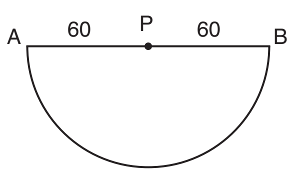
Yarıçapının uzunluğu 60 cm olan bir yarım daire şeklindeki karton, bükülerek dik dairesel koni biçiminde şapka yapılıyor. Buna göre şapkanın hacminin kaç cm^3 olduğunu bulalım.

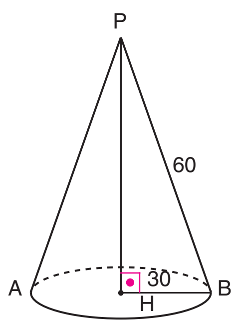


Çözüm

Yandaki gibi bir karton bükülerek şapka yapılacaktır.

Karton yarım daire olduğundan merkez açının ölçüsü 180° dir.





Oluşan koninin yarıçapının uzunluğu r olmak üzere

$$\frac{r}{|PB|} = \frac{180^\circ}{360^\circ} = \frac{r}{60} = \frac{\cancel{180^\circ}^{\,1}}{\cancel{360^\circ}_{\,2}}$$

$$2r = 60$$

$$r = 30 \text{ cm'dir.}$$

$[PH] \perp [HB]$ olacak şekilde $[PH]$ nı çizersek PHB dik üçgeninde

$|HB| = \frac{|PB|}{2} = \frac{60}{2} = 30$ olduğundan $|PH| = 30\sqrt{3}$ cm'dir (30° – 60° – 90° özel üçgeni).

Buradan $V = \frac{\text{Taban alanı x Yükseklik}}{3} = \frac{\pi r^2 \cdot |PH|}{3} = \frac{\pi \cdot 30^2 \cdot \cancel{30}^{\,10}\sqrt{3}}{\cancel{3}_{\,1}}$

$= \pi \cdot 900 \cdot 10\sqrt{3} = 9000\sqrt{3}\,\pi \text{ cm}^3$ olur.

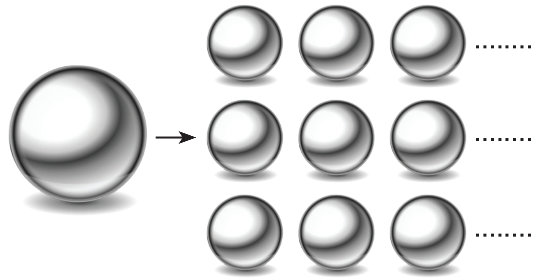
Örnek

Yüzey alanı 576 π cm^2 olan metal bir bilye eritilerek her biri ilk bilyenin yarıçapının $\frac{1}{4}$'ü yarıçapa sahip bilyeler elde ediliyor. Elde edilen bilye sayısını bulalım.



Çözüm

Büyük bilyenin yarıçapının uzunluğu R, küçük bilyelerin yarıçaplarının uzunluğu r olsun. Büyük bilyenin yüzey alanı 576π cm^2 olduğundan



$4\pi R^2 = 576\pi$

$R^2 = 144$

$R = 12$ cm'dir.

Küçük bilyelerin yarıçapının uzunluğu

$r = \frac{R}{4} = \frac{12}{4} = 3$ cm olur.

Büyük bilyenin hacmi, küçük bilyelerin hacimleri toplamına eşittir. n tane küçük bilye oluşsun.

Buradan $V_B = n \cdot V_K \Rightarrow \frac{4 \cdot 1 \cdot \pi \cdot R^3}{3} = \frac{n \cdot 4 \cdot 1 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$

$$12^3 = n \cdot 3^3$$

$$n = \frac{12 \cdot 12 \cdot 12}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 64 \text{ bulunur.}$$

Örnek

Yarıçapının uzunluğu 15 cm olan bir futbol topunun yüzey alanının, yarıçapının uzunluğu 10 cm olan bir voleybol topunun yüzey alanına oranını bulalım.



Çözüm

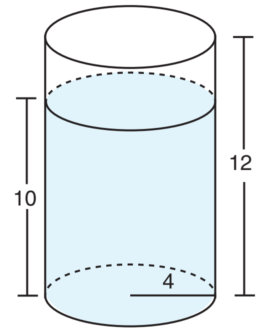
Futbol topunun yarıçapının uzunluğu R_1, voleybol topunun yarıçapının uzunluğu R_2 olmak üzere futbol topunun yüzey alanı A_1, voleybol topunun yüzey alanı A_2 olsun. Buradan

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \left(\frac{15}{10}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ bulunur.

Örnek

Yanda verilen şekildeki dik dairesel silindir biçimindeki kabın içine küre biçiminde bir cisim atılıyor. Cisim atılmadan önce kaptaki sıvının yüksekliği 10 cm, kabın yüksekliği 12 cm ve taban yarıçapının uzunluğu 4 cm'dir.

Atılan cisim tamamen battığına ve kaptan 4π cm^3 su taştığına göre kürenin cismin yarıçapının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulalım.



Çözüm

Küre biçimindeki cisim atıldıktan sonra silindir biçimindeki kabın boş kısmı dolmuş ve kaptan 4π cm^3 su taşmıştır. O hâlde kürenin hacmi, boş kısmın hacmi ile taşan suyun hacminin toplamı kadardır. Boş kısmın hacmi,

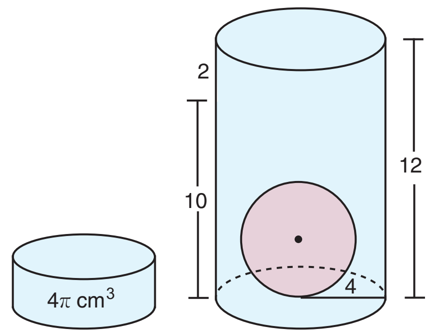
$V_{boş} = \pi r^2 h$ (Kabın dolu kısmının yüksekliği 10 cm ise boş kısmın yüksekliği 2 cm'dir.)

$V_{boş} = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 \Rightarrow V_{boş} = 32\pi$ cm^{3}tür. $V_{taşan} = 4\pi$ cm^3 idi.

O hâlde kürenin hacmi (V_k)

$V_k = V_{boş} + V_{taşan} = 32\pi + 4\pi = 36\pi$ cm^3

$V_k = \dfrac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow \dfrac{4\pi r^3}{3} = 36\pi \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$ cm bulunur.



Örnek

Ayşe, doğum gününe 20 arkadaşını davet etmiştir. Her birine yarıçapının uzunluğu 12 cm, ana doğrusunun uzunluğu 20 cm olan kartondan dik dairesel koni şeklinde şapkalar yapacaktır. Buna göre Ayşe'nin bu şapkaların yapımı için kaç en az cm^2 kartona ihtiyacı olduğunu bulalım ($\pi \approx 3{,}14$ alalım.).



Çözüm

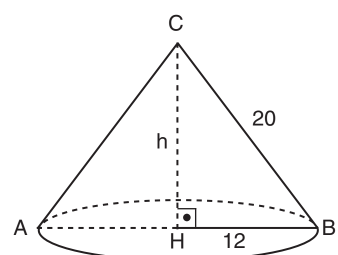
Şekilde şapkanın biri modellenmiştir. h, koninin yüksekliğidir.

CHB dik üçgeninde Pisagor teoremini uygularsak

$|CH|^2 + |HB|^2 = |CB|^2$

$h^2 + 12^2 = 20^2$

$h^2 + 144 = 400 \Rightarrow h^2 = 256 \Rightarrow h = 16$ cm olur.



Şapkaların tabanları açık olacağından koninin yüzey alanını bulmalıyız.

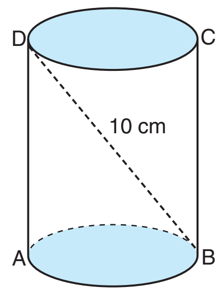
$Y_A = \pi \cdot r \cdot \ell = 3{,}14 \cdot 12 \cdot 20$

$Y_A = 753{,}6$ cm^2 bir şapkanın alanıdır. Ayşe 20 şapka yapacağından

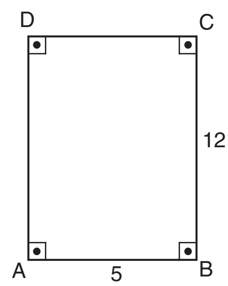
$20 \cdot 753{,}6 = 15\,072$ cm^2 karton kullanır.

Alıştırmalar 6-1

1. Yandaki dik dairesel silindirde $|AB| = 8$ cm, $|BD| = 10$ cm olduğuna göre silindirin yüzey alanının kaç π cm^2 olduğunu bulunuz.



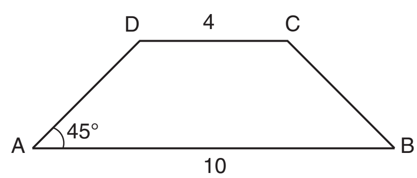
2. Yandaki ABCD dikdörtgeninde $|AB| = 5$ cm, $|BC| = 12$ cm olarak veriliyor.
ABCD dikdörtgeni, $[BC]$ etrafında 360° döndürüldüğünde elde edilen cismin yüzey alanı kaç cm^{2}dir?



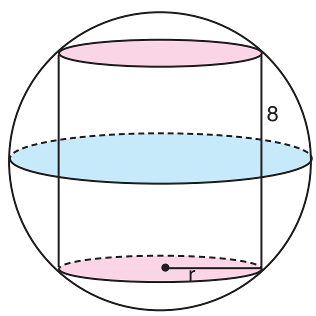
A) 160π B) 170π C) 180π D) 190π E) 200π

3. Yarıçapının uzunluğu 3 cm ve merkez açısının ölçüsü 120° olan bir daire dilimi, yanal yüz olacak şekilde kıvrılarak bir dik dairesel koni oluşturuluyor. Buna göre koninin;
a) yüksekliğini,
b) yüzey alanını,
c) hacmini bulunuz.

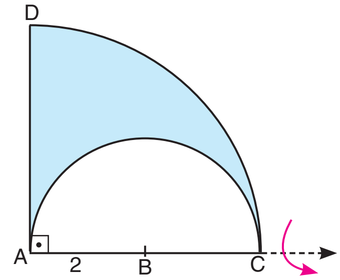
4. Yandaki ABCD ikizkenar yamuğunda $|AB| = 10$ cm, $|CD| = 4$ cm ve $m(\widehat{BAD}) = 45°$ olarak verilmiştir.
ABCD ikizkenar yamuğu $[AB]$ etrafında 360° döndürüldüğünde oluşan cismin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.



5. Yandaki kürenin yüzeyine değecek şekilde bir dik dairesel silindir yerleştiriliyor. Silindirin hacmi 72π cm^3 ve yüksekliği 8 cm olduğuna göre kürenin yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



6. Şekilde $[AC]$ çaplı yarım çember ve $[AD]$ yarıçaplı çeyrek çember verilmiştir. $[AD] \perp [AC]$, $|AB| = 2$ cm'dir. Boyalı bölgenin $[AC]$ etrafında 360° döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi kaç π cm^3tür?

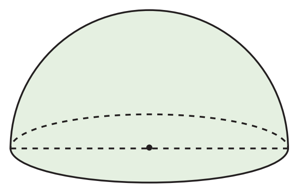


7. Bir ayrıtının uzunluğu 12 cm olan küpün içine yerleştirilebilecek en büyük hacimli kürenin yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

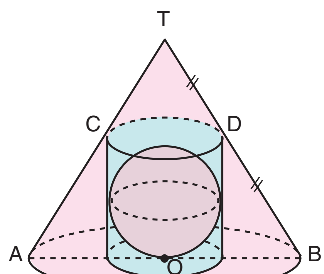
8. Emel doğum günü kutlamasına arkadaşlarını davet ediyor. Arkadaşları da çeşitli hediyeler alarak kutlamaya katılıyor. Emel, doğum günü için taban yarıçapının uzunluğu 10 cm ve yüksekliği 12 cm olan dik dairesel silindir şeklinde bir pasta yaptırıyor. Pastayı üst taban merkezinden 12 eş parçaya ayırıyor.
Buna göre bir kişiye düşen yaş pastanın hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz ($\pi \cong 3,14$ alınız.).



9. Şekilde verilen yarım küre biçimindeki çadırın taban alanı 36π cm^2 olduğuna göre hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.



10. Şekilde dik dairesel koni içine dik dairesel silindir ve silindirin tabanları ile yanal yüzeyine teğet küre yerleştirilmiştir. $|TD| = |DB|$ ve kürenin hacmi 36π cm^3 olduğuna göre koninin hacmi kaç π cm^3tür?



A) 288 B) 224 C) 180 D) 160 E) 144

11. İçi dolu bir cam küre eritiliyor, tekrar kalıba dökülüp 64 yeni eş küre yapılıyor. Buna göre küçük kürelerin alanları toplamının başlangıçtaki kürenin alanına oranı kaçtır?



A) 9 B) 8 C) 6 D) 4 E) 3

6. DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Aşağıdaki noktalı yerlere uygun ifadeleri yazarak cümleleri tamamlayınız.

a) Ana doğruları tabanlara dik silindirlere .... denir.

b) Dik dairesel silindirin yanal alanı .... ile .... çarpımına eşittir.

c) Yükseklik ayağı taban merkezinde olan koniye .... denir.

ç) Uzayda sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktalar kümesine .... denir.

2. Aşağıdaki cümlelerin başındaki kutucuğa ifade doğruysa "D", yanlışsa "Y" yazınız.

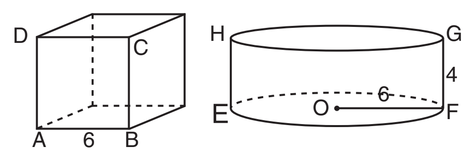
a) ☐ Tabanı daire olan koniye dik dairesel koni denir.

b) ☐ Yarıçapının uzunluğu r br olan kürenin yüzey alanı $\frac{4\pi r^2}{3}$ ile bulunur.

c) ☐ Bir dikdörtgen, herhangi bir kenarı etrafında 360° döndürülürse dik dairesel silindir oluşur.

ç) ☐ Taban yarıçapının uzunluğu r ve yüksekliği h olan bir dik dairesel koninin hacmi $\frac{\pi r^2 h}{3}$ ile hesaplanır.

3. Şekildeki kare dik prizma ile dik dairesel silindirin hacimleri eşittir.
$|AB| = 6$ cm, $|OF| = 6$ cm, $|GF| = 4$ cm olduğuna göre kare prizmanın yüksekliği kaç π cm'dir?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

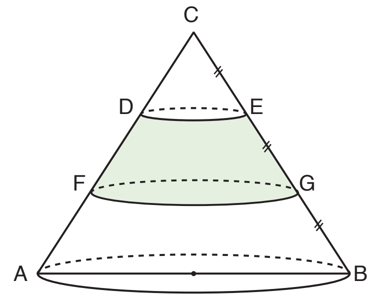
4. Merkez açısının ölçüsü 120° ve yarıçapının uzunluğu 12 cm olan bir daire dilimi kıvrılarak dik dairesel koni oluşturuluyor. Buna göre dik dairesel koninin taban alanı kaç π cm^2 olur?

A) 4 B) 9 C) 16 D) 25 E) 36

5. Yarıçapının uzunluğu 13 cm olan bir küre, merkezinden 12 cm uzaklıkta bir düzlemle kesiliyor. Düzlemle kürenin ara kesiti olan şeklin alanı kaç cm^{2}dir?

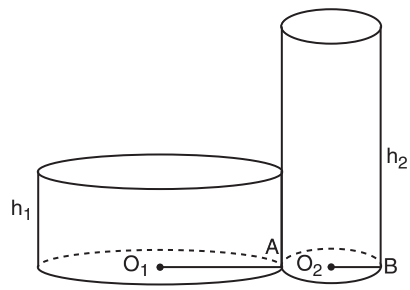
A) 12π B) 16π C) 25π D) 27π E) 36π

6. Şekildeki dik koninin ana doğrusu üç eşit parçaya bölünerek tabana paralel kesitler alınıyor. $|CE| = |EG| = |GB|$ dur.
$[DE]$ ve $[FG]$ kesitleri arasında kalan bölgenin hacmi 28 cm^3 olduğuna göre dik dairesel koninin hacmi kaç cm^3tür?



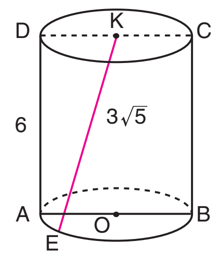
A) 81 B) 96 C) 100
D) 104 E) 108

7. Şekilde, hacimleri eşit iki dik dairesel silindir verilmiştir.
$|O_1A| = 3r$, $|O_2B| = r$ olduğuna göre
$\frac{h_1}{h_2}$ oranı aşağıdakilerden hangisidir?



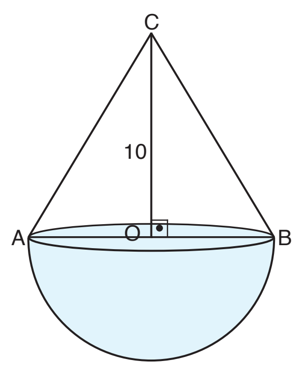
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{7}$
D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{1}{10}$

8. Şekilde dik dairesel silindir verilmiştir.
$|KE| = 3\sqrt{5}$ cm, $|AD| = 6$ cm olduğuna göre dik silindirin hacmi kaç cm^3tür?



A) 36π B) 48π C) 52π
D) 54π E) 72π

9. Şekilde O merkezli yarım kürenin üzerine bir dik dairesel koni yerleştirilmiştir.
$[CO] \perp [OB]$,
$|OB| = 6$ cm,
$|CO| = 10$ cm olmak üzere tüm şeklin hacmi kaç π cm^3tür?



A) 368 B) 348 C) 328
D) 294 E) 264

10. Hacmi 36π cm^3 olan bir küre, merkezinden 2 cm uzakta bir düzlemle kesiliyor. Buna göre kesit dairesinin alanı kaç π cm^2dir?

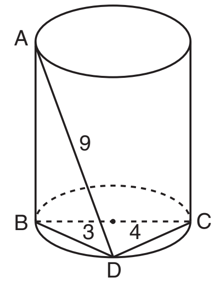
A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

11. Yandaki dik dairesel silindirde $|AD| = 9$ cm, $|BD| = 3$ cm, $|DC| = 4$ cm olarak veriliyor.

$[BC]$ taban çapı olmak üzere silindirin hacmi kaç cm^{3}tür?

A) $\frac{75\sqrt{2}}{2}\pi$ B) $40\sqrt{2}\pi$ C) $\frac{85\sqrt{2}}{2}\pi$

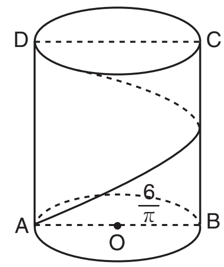
D) $45\sqrt{2}\pi$ E) $\frac{95\sqrt{2}}{2}\pi$



12. Şekildeki dik dairesel silindirde taban yarıçapının uzunluğu $r = \frac{6}{\pi}$ cm, yükseklik 16 cm olarak veriliyor. A dan hareket eden bir karıncanın yüzeyi dolanarak D ye giderken alabileceği en kısa yol kaç cm'dir?

A) 18 B) 20 C) 24

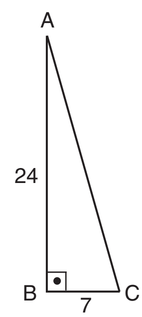
D) 25 E) 30



13. Şekildeki ABC dik üçgeninde $|AB| = 24$ cm, $|BC| = 7$ cm olarak verilmiştir. ABC dik üçgeninin $[AB]$ etrafında 360° döndürülmesiyle elde edilen cismin yüzey alanı kaç cm^{2}dir?

A) 224π B) 220π C) 216π

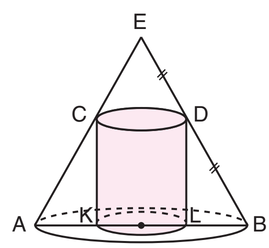
D) 212π E) 208π



14. Yandaki şekilde küçük dik dairesel silindir, büyük dik dairesel silindirin tabanına, K ve L noktalarına değmektedir. $|ED| = |DB|$ olmak üzere koninin hacminin silindirin hacmine oranı kaçtır?

A) $\frac{8}{3}$ B) 3 C) $\frac{10}{3}$

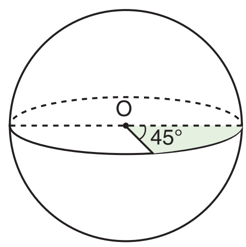
D) $\frac{11}{3}$ E) 4



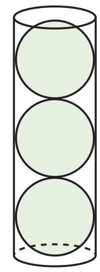
15. En büyük dairesinin 45°lik diliminin alanı 2π cm^2 olan kürenin yüzey alanı kaç cm^{2}dir?

A) 64π B) 72π C) 81π

D) 88π E) 96π



16. Şekilde bir dik dairesel silindirin içine özdeş 3 küre yerleştirilmiştir. Küreler tabanlara ve yan yüzlere teğet olduğuna göre silindirin hacminin bir kürenin hacmine oranını bulunuz.



A) 10 B) $\frac{9}{2}$ C) 4

D) $\frac{2}{2}$ E) 3

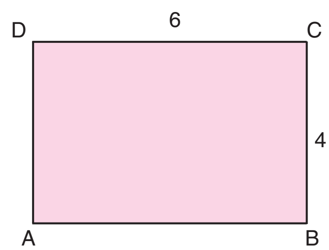
17. Bir top fabrikası pilates topu yapıyor. Yapılan ilk topu küçük bulan firma müdürü, topun yüzey alanının %96 artırılmasını söylüyor. Buna göre topun yarıçapı % kaç artırılmalıdır?



A) 25 B) 30 C) 35

D) 40 E) 45

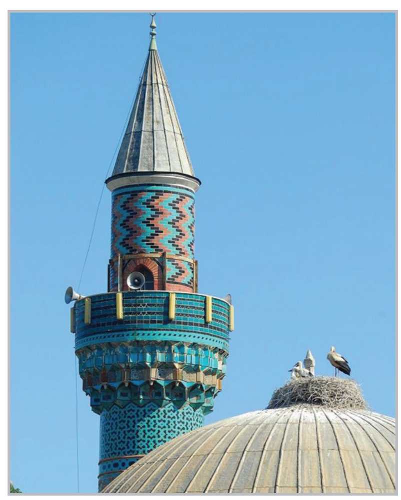
18. Yandaki ABCD dikdörtgeninde $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 4$ cm'dir. ABCD dikdörtgeninin $[DC]$ kenarının etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç cm^{3}tür ($\pi \approx 3,14$ alınız.)?



A) 256,28 B) 272,16 C) 301,44

D) 305,14 E) 325,12

19. Bir minarenin en tepesi yarıçapının uzunluğu 0,5 metre ve ana doğrusunun uzunluğu 4 metre olan koni biçimindedir. Koni biçimindeki bu minarenin tepesinin yanal yüzeyi izolasyon malzemesiyle kaplattırılacaktır. İzolasyon malzemesinin metrekaresi 100 TL'dir. Bir işçi bir günde 3 metrekare izolasyon malzemesi döşeyebilmektedir. İşçinin günlük yevmiyesi 400 TL olduğuna göre bu çatıyı izolasyon malzemesiyle kaplatmanın maliyeti kaç TL'dir ($\pi \approx 3$ alınız.)?



A) 1200 B) 1250 C) 1300

D) 1350 E) 1400

Ölçme ve Değerlendirme Soruları

EBA

7

OLASILIK

Bu bölümde;

- Koşullu olasılığı açıklayarak problemleri çözmeyi,
- Bağımlı ve bağımsız olayları açıklayarak gerçekleşme olasılıklarını hesaplamayı,
- Bileşik olayı açıklayarak gerçekleşme olasılığını hesaplamayı,
- Deneysel olasılık ile teorik olasılığı ilişkilendirmeyi öğreneceksiniz.



Terimler ve Semboller

Terimler ve Kavramlar: koşullu olasılık, bağımlı olay, bağımsız olay, bileşik olay

Sembol ve Gösterimler: $P(A / B), P(A \cap B), P(A \cup B)$

Hazırlık Çalışması

Aynı büyüklükte 4 mavi, 3 kırmızı bilye bir torbaya konuluyor. Torbadan rastgele bir bilye çekiliyor. Buna göre

a) Bilye çekme deneyine ait örnek uzayın eleman sayısını bulunuz.

b) Çekilen bilyenin mavi bilye olma olasılığını bulunuz.

c) Çekilen bilyenin kırmızı olma olasılığını bulunuz.

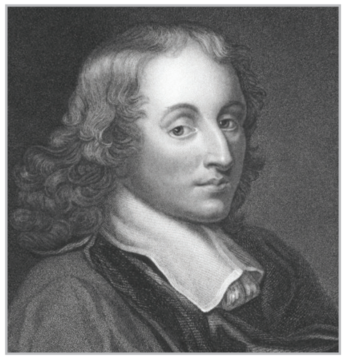
ç) Çekilen bilyenin beyaz olma olasılığını bulunuz.

d) Çekilen bilyenin mavi veya kırmızı olma olasılığını bulunuz.

e) Olasılık değerlerinin alacağı değer aralığını bulunuz.

7.1. KOŞULLU OLASILIK

Olasılık, bir şeyin olmasının veya olmamasının matematiksel veya olabilirlik yüzdesi değeri şeklinde tanımlanır. 17. yüzyılın ikinci yarısında olasılık konusunun Pascal (Paskal) ve Fermat (Ferma) tarafından sabır ve özveri ile çalışılarak matematiksel olarak incelenmeye başlanması ile olasılık sözcüğü, modern anlamına doğru yol almıştır.



Blaise Pascal
(Bleyz Paskal, temsilî)

Bugün olasılık bilimi; endüstri, ekonomi, spor, yönetim gibi insanın yaşamını etkileyen her alana girmiştir. Örneğin bankacılık, sigortacılık, endüstride kalite kontrolü, genetik, gazların kinetik teorisi, kuantum mekaniği gibi pek çok alan, olasılık kuramı olmadan ayakta duramaz.

Pierre Simon Laplace'ın da (Piyer Simon Laplas) belirttiği gibi olasılık, kökleri şans oyunlarına dayanan ve büyük birikimler elde edilmesini sağlayan bir yöntem iken bugün insan bilgisinin önemli bir aracı durumuna gelmiştir.

Genel ağdan alınmıştır.

Hatırlatma

Bir deneyin tüm sonuçlarının oluşturduğu kümeye örnek uzay denir ve bu küme E ile gösterilir. Örnek uzayın her bir alt kümesine **olay** denir.

Bir olayın gerçekleşme değerinin [0,1] ndaki bir reel sayı ile gösterilmesine bu olayın **olma olasılığı** denir.

Her bir elemanın gelme olasılığı eşit olan uzaya **eş olumlu örnek uzay** denri.

A olayı E eş olumlu örnek uzayda bir olay olmak üzere A olayının olasılığı $P(A)=\dfrac{s(A)}{s(E)}$ ile hesaplanır.

Herhangi bir A olayının gerçekleşme olasılığı P(A), gerçekleşmeme olasılığı $P(A')$olmak üzere $P(A)+P(A')=1$ olur.

7.1.1. Koşullu Olasılık Kavramı

Bilgi

A ve B, bir E örnek uzayına ait iki olay olsun. B olayının gerçekleşmesi hâlinde A olayının gerçekleşmesi olasılığına **A nın B ye bağlı koşullu olasılığı** denir ve bu olasılık $P(A|B)$ biçiminde gösterilir.

Bu olasılık $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ile hesaplanır.

Örnek

1 den 25 e kadar numaralandırılmış özdeş kartlar arasından rastgele biri seçiliyor. Seçilen kartın üzerindeki sayının çift olduğu bilindiğine göre bu sayının 6 ile bölünebilme olasılığını bulalım.

Çözüm

$E=\{1, 2, ..., 25\}$

Çift olma olayı $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24\}$; gelen sayının 6 ile tam bölünebilme olayı $B=\{6, 12, 18, 24\}$ dir. $A\cap B=\{6,12,18,24\}$ dir.

$P(A)=\dfrac{s(A)}{s(E)}=\dfrac{12}{25}$ ve $P(A\cap B)=\dfrac{s(A\cap B)}{s(E)}=\dfrac{4}{25}$ olur.

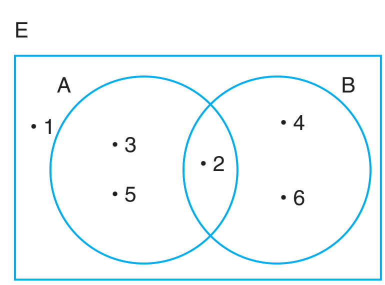
O hâlde B nin A koşullu olasılığı, $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{4}{25}}{\frac{12}{25}}=\dfrac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{25}_{1}}\cdot\dfrac{\cancel{25}^{1}}{\cancel{12}_{3}}=\dfrac{1}{3}$ bulunur.

Örnek

Bir hilesiz zar atıldığında, gelen sayının çift sayı olduğu biliniyorsa bu sayının asal sayı olma olasılığını bulalım.

Çözüm

Zar atılması deneyinde örnek uzay E, zarın üst yüzüne asal sayı gelmesi olayı A, zarın üst yüzüne çift sayı gelmesi olayı B olsun. Bunları yandaki Venn şeması ile gösterelim.



$E=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $A=\{2,\ 3,\ 5\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6\}$ ve $A\cap B=\{2\}$ olur.

Üst yüze çift geldiği bilindiğinde bunun asal sayı olma olasılığı yani A nın B koşullu olasılığı,

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{s(A\cap B)}{s(E)}}{\frac{s(B)}{s(E)}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{1}{\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{6}}{3}=\frac{1}{3}$$ bulunur.

Örnek

Hilesiz üç madenî para birlikte havaya atılıyor. Paraların üçünün de aynı gelmediği bilindiğine göre tura gelme sayısının yazı gelme sayısından fazla olma olasılığını bulalım.

Çözüm

$s(E) = 2^3 = 8$ dir.

A olayı, atılan üç paranın aynı gelmemesi olsun.

$A = \{(YYT), (YTY), (TYY), (TTY), (TYT), (YTT)\}$ olur.

B olayı, tura sayısının yazı sayısından fazla olması olsun.

$B = \{(TTY), (TYT), (YTT)\}$

$A \cap B = \{(TTY), (TYT), (YTT)\}$

$P(A \cap B) = \dfrac{s(A \cap B)}{s(E)} = \dfrac{3}{8}$

$P(A) = \dfrac{s(A)}{s(E)} = \dfrac{6}{8}$ olur.

O hâlde B nin A koşullu olasılığı $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{6}{8}} = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{8}{6} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$'dir.

Örnek

Bir sınıftaki öğrencilerin %60'ı erkektir ve erkeklerin %40'ı ile kız öğrencilerin %10'u gözlüklüdür. Sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin gözlüksüz olduğu bilindiğine göre kız öğrenci olması olasılığını bulalım.

Çözüm

Sınıf mevcudu 100x olsun. Sınıfın %60'ı erkek olduğundan erkek sayısı $100x \cdot \dfrac{60}{100} = 60x$, kız sayısı ise 40x tir. Erkeklerin %40'ı gözlüklü ise $60x \cdot \dfrac{40}{100} = 24x$ gözlüklü erkek, kız öğrencilerin % 10'u gözlüklü ise $40x \cdot \dfrac{10}{100} = 4x$ gözlüklü kız öğrenci olur. Buna göre aşağıdaki tabloyu yapalım.

	Gözlüklü	Gözlüksüz
Erkek	24x	36x
Kız	4x	36x

A olayı gözlüksüz öğrenci olma olayı, B olayı kız öğrenci olma olayı olsun.

Buna göre $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{s(A \cap B)}{s(A)}$

$= \dfrac{36x}{72x}$

$= \dfrac{1}{2}$ olur (Tabloyu inceleyiniz.).

7.1.2. Bağımlı ve Bağımsız Olaylar

Hilesiz iki madenî paranın havaya atılma olayında I. madenî paranın üst yüzüne yazı gelme olasılığı $\frac{1}{2}$'dir. II. madenî paranın da üst yüzüne yazı gelme olasılığı $\frac{1}{2}$'dir. I. madenî paranın üst yüzüne ne gelirse gelsin bu durum, II. madenî paranın üst yüzüne ne geleceğini etkilemez.

Bilgi

A ve B, aynı E örnek uzayına ait iki olay olsun. Bu olaylardan birinin gerçekleşmesi (veya gerçekleşmemesi) diğerinin gerçekleşme olasılığını değiştirmiyorsa bu olaylara **bağımsız olaylar** denir.

A ve B bağımsız iki olay ise $P(A) = P(A|B)$ dir. A ile B olayları bağımsız değil ise bu olaylara **bağımlı olaylar** denir.

Örnek

Hilesiz bir zar atıldığında zarın tek sayı gelmesi olayı A, çift sayı gelmesi olayı B ve asal sayı gelmesi olayı C olsun. A, B ve C olaylarının kendi aralarında bağımsız olup olmadıklarını bulalım.

Çözüm

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ ve $C = \{2, 3, 5\}$ olur.

A nın olasılığı $P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$'dir.

B nin olasılığı $P(B) = \frac{s(B)}{s(E)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$'dir. A ve B kümelerine baktığımızda,

B olayı olsa da olmasa da A olayının gerçekleşme olasılığı değişmez.

$P(A|B) = P(A) = \frac{1}{2}$ olur. A olayı B den bağımsızdır.

$A \cap C = \{3,5\}$

$P(A|C) = \frac{s(A \cap C)}{s(C)} = \frac{2}{3}$ bulunur.

$\frac{1}{2} \neq \frac{2}{3}$ yani $P(A) \neq P(A|C)$ olduğundan A ile C bağımsız değildir.

Dolayısıyla A ve C olayı bağımlı olaylardır.

Bilgi

E örnek uzayında $A \subset E$, $B \subset E$, $P(B) \neq 0$ olsun.

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$ dir. Buna **çarpım kuralı** denir.

Örnek

Bir kutuda 3'ü bozuk, 12 ampul vardır. Kutuya geri konulmamak üzere arka arkaya seçilen iki ampulün ikisinin de bozuk olma olasılığını bulalım.

Çözüm

Burada $P(B)$ I. ampulün bozuk gelmesi,

$P(A / B)$ ise I. ampul bozuk geldiğinde II. ampulün bozuk gelmesi olsun.

I. Bozuk	II. Bozuk
$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{11}$

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A / B)$ olduğundan

$P(A \cap B) = \dfrac{3}{12} \cdot \dfrac{2}{11} = \dfrac{1}{22}$ bulunur.

Örnek

Bir sınıfta 8 kız, 12 erkek öğrenci vardır. Sınıftan art arda iki öğrenci seçiliyor. Birincinin erkek, ikincinin kız öğrenci olma olasılığını bulalım.

Çözüm

Sınıftan seçilen ilk öğrencinin erkek öğrenci olması olayı A, ikinci seçilen öğrencinin kız öğrenci olması olayı B olsun. Birincinin erkek, ikincinin kız öğrenci olma olayı $A \cap B$ olsun. İlk öğrenci 20 öğrenci arasından seçilecektir.

O hâde $P(A) = \dfrac{s(A)}{s(E)} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$ olur.

İkinci öğrenci 8 kız öğrencinin bulunduğu 19 öğrenci arasından seçilecektir. Buradan

$P(B / A) = \dfrac{8}{19}$ ve

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A)$

$P(A \cap B) = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{8}{19} = \dfrac{24}{95}$ bulunur.

Bilgi

E örnek uzayında iki olay A ve B olsun. A olayı B olayından bağımsız ise $A \cap B$ olayının olasılığı $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$'dir.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ olur.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$ olur.

Örnek

Hilesiz bir zar ve hilesiz bir madenî para atıldığında paranın yazı ve zarın çift gelmesinin bağımsız olaylar olup olmadığını bulalım.

Çözüm

Paranın ve zarın atılması olayında örnek uzay,

$E = \{(Y, 1), (Y, 2), (Y, 3), (Y, 4), (Y, 5), (Y, 6), (T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6)\}$ dir.

Paranın yazı gelme olayı A, zarın çift gelme olayı B olsun.

$A = \{(Y, 1), (Y, 2), (Y, 3), (Y, 4), (Y, 5), (Y, 6)\}$

$B = \{(Y, 2), (Y, 4), (Y, 6), (T, 2), (T, 4), (T, 6)\}$

$A \cap B = \{(Y, 2), (Y, 4), (Y, 6)\}$

$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{s(B)}{s(E)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{s(A \cap B)}{s(E)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ olur.

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ bulunur.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ olduğundan A ve B olayları bağımsızdır.

Örnek

A ve B olayları herhangi iki olay olmak üzere $P(B) = \frac{2}{5}$, $P(A \cup B) = \frac{7}{10}$ ve $P(A) = a$ olduğuna göre

a) A ve B olayları ayrık ise a'nın kaç olduğunu,

b) A ve B bağımsız olaylar ise a'nın kaç olduğunu bulalım.

Çözüm

a) A ile B ayrık ise $A \cap B = \varnothing$ olur.

Bu durumda $P(A \cap B) = 0$ ve $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ olur.

$$\frac{7}{10} = a + \frac{2}{5} \Rightarrow a = \underset{(1)}{\frac{7}{10}} - \underset{(2)}{\frac{2}{5}} \Rightarrow a = \frac{7}{10} - \frac{4}{10} = \frac{3}{10} \text{ bulunur.}$$

b) A ile B bağımsız olaylar ise $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ olur.

O hâlde $P(A \cap B)$ nin yerine $P(A) \cdot P(B)$ yazılırsa

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$\frac{7}{10} = a + \frac{2}{5} - a \cdot \frac{2}{5} \Rightarrow \underset{(1)}{\frac{7}{10}} - \underset{(2)}{\frac{2}{5}} = \underset{(5)}{\frac{a}{1}} - \underset{(1)}{\frac{2a}{5}}$$

$$\frac{3}{10} = \frac{3a}{5} \Rightarrow 30a = 15$$

$$a = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek

Bir torbada renkleri dışında özdeş 4 ü mavi 7 top, ikinci torbada 3 ü mavi 5 top vardır. Torbalardan birer top alınıyor. Her iki topun da mavi olma olasılığını bulalım.

Çözüm

A olayı, birinci torbadan mavi top çekme olayı olsun.

$P(A) = \frac{4}{7}$ olur.

B olayı, ikinci torbadan mavi top çekme olayı olsun.

$P(B) = \frac{3}{5}$ olur.

A olayı ile B olayı bağımsız olaylar olduğundan her iki topun da mavi olması olasılığı,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{12}{35} \text{ bulunur.}$$

Örnek

Ali ile Ayşe'nin matematik sınavında başarılı olma olasılıkları sırasıyla $\frac{1}{2}$ ve $\frac{2}{5}$'tir. Bu sınavda yalnız Ali'nin başarılı olma olasılığını bulalım.

Çözüm

A olayı, Ali'nin matematik sınavında başarılı olma olayı olsun. $P(A) = \frac{1}{2}$ olur.

B olayı, Ayşe'nin matematik sınavında başarılı olma olayı olsun. $P(B) = \frac{2}{5}$ olur.

Burada yalnız Ali'nin başarılı olma olasılığı sorulduğundan Ayşe başarısız olmalıdır.

B′ olayı, Ayşe'nin başarısız olma olayı olmak üzere $P(B) = \frac{2}{5}$ ise $P(B') = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ olur.

A ve B′ olayları bağımsız olaylar olduğundan

$P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B')$

$P(A \cap B') = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$

$P(A \cap B') = \frac{3}{10}$ bulunur.

7.1.3. Bileşik Olayların Olasılıkları

Bilgi

İki veya daha çok olayın birlikte veya birbiri ardına meydana gelmesine **bileşik olay** denir.

Örnek

İki nişancı bir hedefe ateş ediyor. I. nin hedefi vurma olasılığı $\frac{2}{3}$, II. nin hedefi vurma olasılığı $\frac{1}{5}$'tir. Bu iki olay birbirinden bağımsız olduğuna göre hedefi I. nişancının veya II. nişancının vurma olasılığını bulalım.

Çözüm

I. nişancının hedefi vurma olayı A, II. nişancının hedefi vurma olayı B olsun.

O hâlde $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ olur. A ve B olayları bağımsız olduğundan bu iki olayın birlikte gerçekleşmesi $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ olur.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ olur. Buradan A veya B nin gerçekleşme olayının olasılığı,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \underset{(5)}{\frac{2}{3}} + \underset{(3)}{\frac{1}{5}} - \underset{(1)}{\frac{2}{15}} = \frac{10}{15} + \frac{3}{15} - \frac{2}{15} = \frac{11}{15}$ bulunur.

Örnek

Hilesiz bir zar ve hilesiz bir madenî para birlikte atılıyor. Zarın üst yüzüne gelen sayının 4 ten büyük olması veya paranın yazı gelmesi olasılığını bulalım.

Çözüm

Zarın üst yüzüne gelen sayının 4 ten büyük olması olayı A = {5, 6} ve s(A) = 2 olur. Paranın yazı gelmesi olayı B = {Y} ve s(B) = 1 olur. Burada A ve B olayları bağımsız olaylardır.

Yani $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$'dır. A veya B olayının olasılığı,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \underset{(1)}{\frac{2}{6}} + \underset{(3)}{\frac{1}{2}} - \underset{(1)}{\frac{1}{6}} = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ bulunur.

Örnek

Bir torbada renkleri dışında özdeş 4 kırmızı, 3 sarı, 2 mavi bilye vardır. Torbadan rastgele çekilen 2 topun da aynı renkte olma olasılığını bulalım.

Çözüm

A: Çekilen iki bilyenin aynı renkte olma olayı

Çekilen bilyelerin 2 si kırmızı, 2 si sarı veya 2 si mavi olabilir. Bu durumda

4 kırmızıdan 2 kırmızı seçilme sayısı $\binom{4}{2} = 6$

3 sarıdan 2 sarı seçilme sayısı $\binom{3}{2} = 3$

2 maviden 2 mavi seçilme sayısı $\binom{2}{2} = 1$ olur ve $s(A) = 6 + 3 + 1 = 10$ olur.

Torbada toplam 9 bilye vardır. Evrensel kümenin eleman sayısı $s(E) = \binom{9}{2} = 36$ olur.

Bu A olayının olasılığı $P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ bulunur.

Örnek

Bir torbada renkleri dışında özdeş 3 kırmızı, 5 yeşil ve 2 sarı top bulunmaktadır. Buna göre bu torbadan çekilen 3 topun farklı renklerde olma olasılığını bulalım.

Çözüm

Üç topun farklı renkte olma olayı A olsun. 3 kırmızıdan 1 kırmızı $\binom{3}{1}$, 5 yeşilden 1 yeşil $\binom{5}{1}$ ve 2 sarıdan 1 sarı $\binom{2}{1}$ farklı şekilde seçim yapılabilir.

O hâlde saymanın çarpma kuralından $s(A) = \binom{3}{1} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{2}{1} = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$ bulunur.

Örnek uzayın eleman sayısı ise $s(E) = \binom{10}{3}$ olur.

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 \text{ olur.}$$

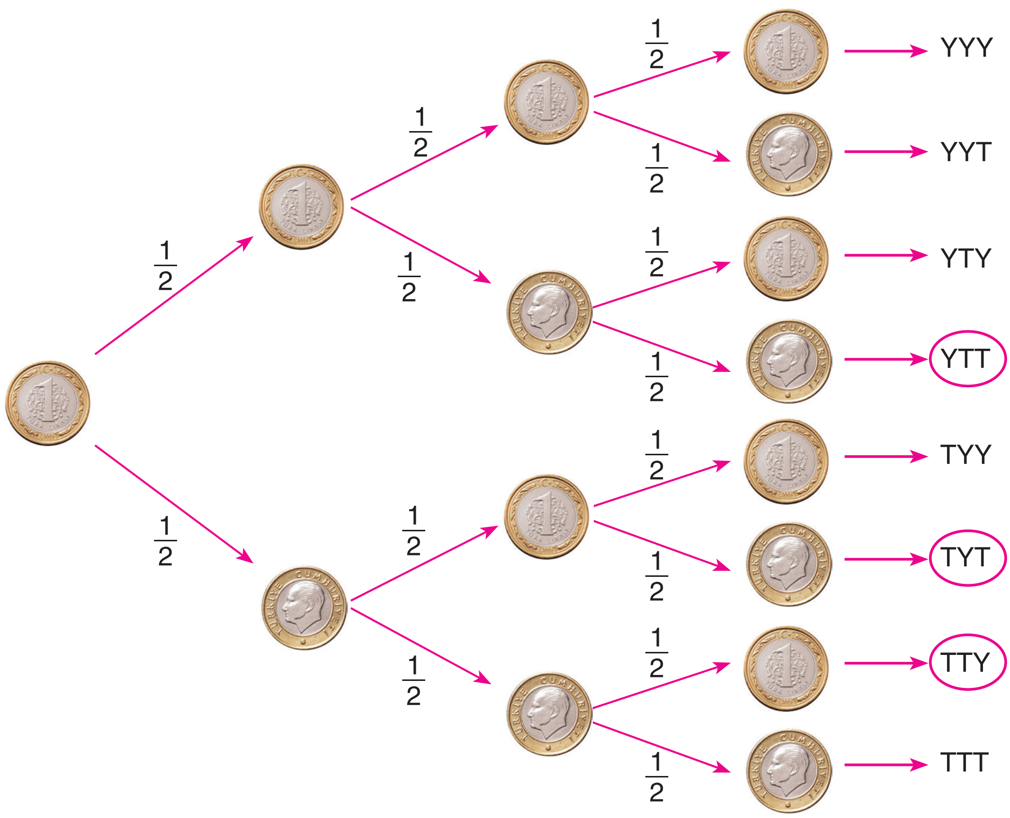
O hâlde A olayının olasılığı $P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$ bulunur.

Örnek

Hilesiz bir madenî para art arda üç defa atıldığında iki defa tura bir defa yazı gelme olasılığını bulalım.

Çözüm

Madenî paranın art arda üç defa atılması olayını ağaç şemasıyla gösterelim.



Art arda üç defa atılan madenî paranın iki defa tura bir defa yazı gelme olayına A dersek yukarıdaki ağaç şemasından,

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \text{ bulunur.}$$

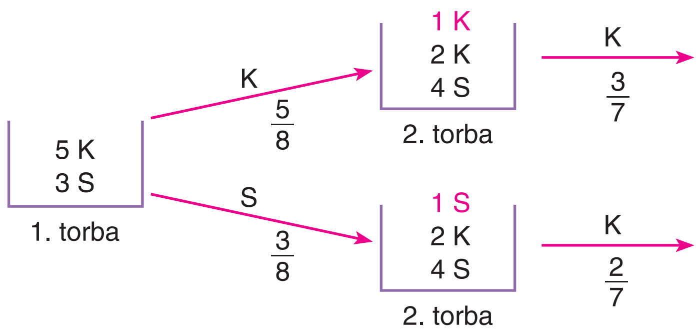
Örnek

Birinci torbada renkleri dışında özdeş 5 kırmızı, 3 sarı; ikinci torbada 2 kırmızı, 4 sarı top vardır. Birinci torbadan bir top çekilip rengine bakılmaksızın ikinci torbaya atılıyor. İkinci torbadan bir top çekiliyor. Çekilen topun kırmızı olma olasılığını bulalım.

Çözüm

K, kırmızı; S, sarı topları göstersin. A, kırmızı top çekme olayı olsun.

E-İçerik



Yukarıdaki ağaç şemasına göre ikinci torbadan kırmızı top çekme olasılığı,

$P(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{15}{56} + \frac{6}{56} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$ olur.

Örnek

Hilesiz bir zarın bir yüzü siyah, iki yüzü beyaz, üç yüzü kırmızıdır. Bu zar art arda atılıyor. Üç atış sonunda zarın üst yüzüne iki kez siyah, bir kez kırmızı gelme olasılığını bulalım.

Çözüm

İki kez siyah, bir kez kırmızı gelme olayı A olsun.

I. durum: 1. siyah, 2. siyah, 3. kırmızı

II. durum: 1. siyah, 2. kırmızı, 3. siyah

III. durum: 1. kırmızı, 2. siyah, 3. siyah

I. durumun olasılığı $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{72}$,

II. durumun olasılığı $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{72}$,

III. durumun olasılığı $\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{72}$ olur. Buradan

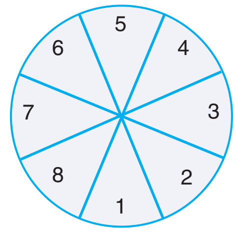
$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$

$P(A) = \frac{1}{72} + \frac{1}{72} + \frac{1}{72} = \frac{3}{72}$

$P(A) = \frac{1}{24}$ bulunur.

Alıştırmalar 7-1

1. Yandaki eşit dilimli hedef tahtasına bir ok atılıyor. Okun, hedef tahtasına isabet ettiği biliniyor. Buna göre



a) Okun, 4'ten büyük bir sayının yazılı olduğu dilime gelme olasılığını bulunuz.

b) Okun, asal sayının yazılı olduğu bir dilime gelme olasılığını bulunuz.

c) İsabet eden dilimde 3'ten büyük bir sayının yazılı olduğu biliniyorsa bunun tek sayı olma olasılığını bulunuz.

2. Aşağıda, üzerlerinde 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8 rakamlarının yazılı olduğu dokuz kart gösterilmiştir.

0	1	2	3	4	5	6	7	8

Bu kartlardan rastgele ikisini seçen Eda, "Seçtiğim kartların üzerinde yazan rakamları topladığımda sonuç tek sayıdır." bilgisini veriyor.
Buna göre Eda'nın seçtiği kartlardan birinin üzerinde yazan sayının 5 olma olasılığını bulunuz.

3. Hilesiz bir madenî para 3 kez havaya atılıyor. İlk atışın yazı geldiği bilindiğine göre diğer ikisinin de yazı gelme olasılığını bulunuz.

4. 24 kişilik bir sınıftaki öğrencilerin 16'sı fizik, 14'ü matematik dersinden geçmiştir. Her iki dersten de kalan yoktur. Bu sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin fizik dersinden geçtiği bilindiğine göre matematik dersinden de geçme olasılığını bulunuz.

5. Hilesiz bir 3 madenî para havaya atılıyor. Paraların ikisinin tura geldiği bilindiğine göre diğerinin de tura gelme olasılığını bulunuz.

6. Bir turist kafilesinde 6 Fransız, 4 Rus ve 2 Alman turist vardır. Bu kafileden rastgele seçilecek iki turist, Dolmabahçe Sarayı'na götürülecektir. Seçilen iki turistin aynı ülke vatandaşı olduğu bilindiğine göre iki turistin de Rus vatandaşı olma olasılığını bulunuz.

7. Hilesiz iki zar birlikte atılıyor. Zarların üst yüzlerine gelen sayıların çarpımının 5 in katı olduğu bilindiğine göre ikisinin de tek olma olasılığını bulunuz.

8. Bir soruyu Ali'nin çözme olasılığı $\frac{2}{5}$, Veli'nin çözme olasılığı $\frac{1}{3}$'tür. Ali veya Veli'den en az birinin bu soruyu çözme olasılığını bulunuz.

9. 1'den 20'ye kadar numaralandırılmış aynı büyüklükteki kartların bulunduğu bir kutudan rastgele bir kart seçiliyor. Seçilen kartın üzerindeki sayının tek olduğu bilindiğine göre 3'ün katı olma olasılığını bulunuz.

10. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin alt kümeleri arasından rastgele biri seçiliyor. Seçilen alt kümenin üç elemanlı alt küme olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{16}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{5}{16}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{7}{16}$

11. 6 kız öğrenci ve 4 erkek öğrenci arasından 3 öğrenci seçiliyor. Seçilen öğrencilerden en az birinin erkek öğrenci olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{3}{10}$

12. Bir torbada aynı büyüklükte 4 mavi, 5 sarı bilye bulunmaktadır. Bu torbadan rastgele seçilen 3 bilyeden ikisinin aynı, diğerinin farklı renkte olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{5}{6}$

13. Bir torbada aynı büyüklükte 5 beyaz, 3 kırmızı bilye vardır. Çekilen bilye geri konulmamak üzere torbadan art arda rastgele 3 bilye çekiliyor.

a) Üçünün de kırmızı olma olasılığı kaçtır?

b) Birincisinin beyaz diğerlerinin kırmızı olma olasılığı kaçtır?

c) En az birinin kırmızı olma olasılığı kaçtır?

14. A ve B bağımsız olaylar, $P(A') = \frac{2}{3}$ ve $P(B) = \frac{3}{4}$ olduğuna göre $P(A \cap B)$ değerini bulunuz.

15. Bir torbada aynı büyüklükte 10 mavi, 6 siyah bilye vardır. Tekrar yerine konulacak şekilde torbadan arka arkaya 2 bilye çekiliyor. 2 bilyenin de mavi olma olasılığını bulunuz.

7.2. DENEYSEL VE TEORİK OLASILIK

Sedat ile Serap, bir tavla zarını havaya atarak üst yüze gelen sayının çift sayı olma olasılığını hesaplamak istiyorlar. Sedat, zarı 10 kez havaya atıyor; zar 4 kez tek, 6 kez de çift sayı geliyor. Serap, zarı 20 kez havaya atıyor; zar 11 kez çift 9 kez tek sayı geliyor.



Buna göre Sedat ve Serap'ın deneylerinde üst yüze gelen sayıların çift sayı olma olasılığını bulalım.

Sedat'ın deneyinde üst yüze gelen sayının çift sayı olma olasılığının $\frac{6}{10} = \frac{60}{100} = \%60$, Serap'ın deneyinde üst yüze gelen sayının çift sayı olma olasılığının $\frac{11}{20} = \frac{55}{100} = \%55$ olduğu gözlemlenir.

Bilgi

• Bir deneyde ortaya çıkabilecek tüm sonuçlar göz önünde bulundurularak yapılan matematiksel hesaplamaya **teorik olasılık** denir.

E eş olumlu örnek uzayında A bir olay bir olayı olmak üzere A olayının olasılığı

$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)}$ ile hesaplandığını öğrenmiştik.

• Bir olayın olma olasılığını yapılan denemelerin sonuçlarına göre bulmaya **deneysel olasılık** denir.

Bir olayın deneysel olasılık değeri, deneyde olayın gerçekleşme sayısının deneme sayısına oranına eşittir.

$$\text{Deneysel olasılık} = \frac{\text{Gerçekleşme sayısı}}{\text{Deneme sayısı}}$$

• Eş olasılıklı örnek uzaydaki bir olayın deneysel olasılık değeri, deneme sayısı arttıkça teorik olasılık değerine yaklaşır.

Örnek

Hilesiz bir zar havaya atılıyor. Üst yüze gelen sayının tek sayı olma olasılığını bulalım.

Çözüm

Örnek uzay $E = \{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow s(E) = 6$ olur.

Üst yüze gelen sayının tek sayı olma olayı A ise $A = \{1,3,5\} \Rightarrow s(A) = 3$ olur.

Buradan A olayının olma olasılığı $P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ bulunur.

Örnek

Hilesiz bir zarın 50 defa havaya atıldığı bir olasılık deneyinde, üst yüze gelen sayıların sıklık tablosu aşağıda verilmiştir. Zarın havaya, 51. atılmasında üst yüze 2 gelmesinin deneysel olasılık sonucu ile teorik olasılık değerini karşılaştıralım.

E-İçerik

Üst yüze gelen sayının	Gerçekleşme sayısı
1 olması	12
2 olması	10
3 olması	11
4 olması	6
5 olması	5
6 olması	6
Toplam	**50**

Çözüm

Deneysel olarak üst yüze gelen sayının 2 olma sayısı 10'dur.

Deneysel olarak üst yüze gelen sayının 2 olma olayı A ise

$P(A)=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}=0,2$ olur.

Bir zarın havaya atılmasında üst yüze gelen sayının 2 olma olasılığını bulalım.

$E=\{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow s(E)=6$ olur.

Üst yüze gelen sayının 2 olma olayı A ise $A=\{2\} \Rightarrow s(A)=1$ olur.

A olayının teorik olasılığı $P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{1}{6}=0,1\overline{6}$ olur.

Deney sayısı arttıkça deneysel olasılığın değeri, teorik olasılık değerine yaklaşır.

Örnek

Bir kutuda 4 kırmızı, 3 siyah renkte özdeş bilyeler vardır.

a) Rastgele bir bilye çekiliyor. Çekilen bilyenin rengine ait olasılık çeşidini belirtelim.

b) Rastgele çekilen bir bilyenin siyah olma olasılığını bulalım.

Çözüm

a) Bu olasılık teorik olasılıktır çünkü birden fazla deney yapılmamıştır.

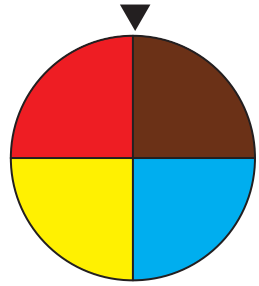
b) Evrensel kümenin eleman sayısı $s(E)=4+3=7$ olur.

Çekilen bilyenin siyah olma olayı A ise $s(A)=3$'tür.

Buradan A olayının olasılık değeri $P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{3}{7}$ bulunur.

Örnek

Yandaki şekilde 4 farklı renge boyanmış çeyrek daireler vardır. 100 deneme sonunda ibrenin daire etrafındaki her turunda hangi renkte durduğunun sayısı aşağıdaki tabloda verilmiştir.



Renk	Sayı
Kırmızı	24
Kahverengi	33
Mavi	17
Sarı	26
Toplam	**100**

Buna göre ibrenin 101. kez hangi renkte durduğunun deneysel ve teorik olasılık değerlerini bulalım.

Çözüm

100 denemede 24 kez kırmızı bölge geldiğinden kırmızı rengin deneysel olasılık değeri $\frac{24}{100} = 0,24$ olur.

100 denemede 33 kez kahverengi bölge geldiğinden kahverengi rengin deneysel olasılık değeri $\frac{33}{100} = 0,33$'tür.

100 denemede 17 kez mavi bölge geldiğinden mavi rengin deneysel olasılık değeri $\frac{17}{100} = 0,17$'dir.

100 denemede 26 kez sarı bölge geldiğinden sarı rengin deneysel olasılık değeri $\frac{26}{100} = 0,26$'dır.

Şimdi de her bir rengin teorik olasılık değerlerini bulalım.

Burada çark üzerinde 4 ayrı renk olduğundan $s(E) = 4$ olur.

Her bir renkten 1 adet olduğundan renklerin teorik olasılık değerleri birbirine eşit olup bu değer $\frac{1}{4}$'tür.

Deneysel olasılık ile bir olayın gerçekleşme olasılığı tahmin edilmeye çalışılır. Teorik olasılık ise kesin bir olasılık değerine sahiptir.

Örnek

Hilesiz bir madenî para, 50 kez havaya atılıyor ve paranın üst yüzüne 34 kez tura geliyor. Buna göre paranın, 51. kez havaya atıldığında üst yüzüne tura gelme olayının deneysel ve teorik olasılık değerlerini bulalım.



Çözüm

Bu olayın deneysel olasılık değerini hesaplayalım. Madenî para 50 kez havaya atıldığından $s(E) = 50$'dir. Paranın üst yüzüne tura gelme olayı A olsun.

34 kez tura geldiğinden $s(A) = 34$'tür. Buradan bu olayın deneysel olasılık değeri

$P(A) = \dfrac{s(A)}{s(E)} = \dfrac{34}{50} = 0,68$ olur.

Bu olayın teorik olasılık değerini bulalım.

$E = \{Yazı, Tura\} \Rightarrow s(E) = 2$'dir. Tura gelme olayı $A = \{Tura\} \Rightarrow s(A) = 1$ olur.

Buradan paranın üst yüzüne tura gelme olayının teorik olasılık değeri $P(A) = \dfrac{s(A)}{s(E)} = \dfrac{1}{2} = 0,5$ olur.

Örnek

İçinde 1'den 5'e kadar (1 ve 5 dâhil) özdeş toplar bulunan iki farklı torbanın her birinden aynı anda birer top çekiliyor. Topların üzerindeki sayılar toplanarak yandaki tablo oluşturuluyor.

Topların Üzerindeki Sayıların Toplamı	Deney Sayısı
2	1
3	2
4	2
5	3
6	2
7	3
8	2
9	4
10	3
Toplam	**22**

Buna göre topların üzerindeki sayıların toplamının 7 gelme olasılığının deneysel ve teorik olasılık değerlerini bulalım.

Çözüm

22 deneme sonucunda çekilen topların üzerindeki sayıların toplamının 7 olması 3 kez gerçekleşmiştir.

Çekilen topların üzerindeki sayıların toplamının 7 olma olayı $A \Rightarrow s(A) = 3$ olur.

Buradan A olayının deneysel olasılık değeri $P(A) = \dfrac{s(A)}{s(E)} = \dfrac{3}{22}$'dir.

Şimdi teorik olasılığın değerini bulalım.

$E = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),...,(5,4),(5,5)\}$ olduğundan $s(E) = 5 \cdot 5 = 25$ olur.

Çekilen topların üzerindeki sayıların toplamı 7 olma olayı,

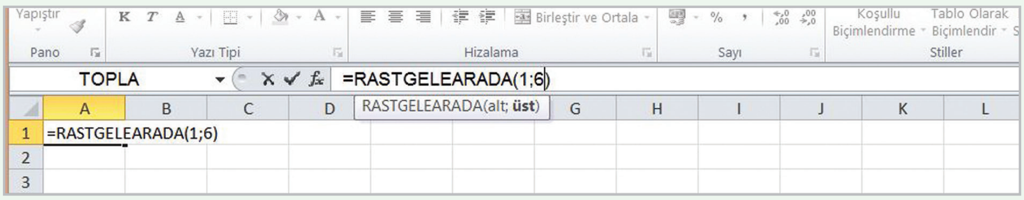
$A = \{(2,5),(3,4),(4,3),(5,2)\}$ olduğundan $s(A) = 4$ olur.

A olayının teorik olasılık değeri $P(A) = \dfrac{s(A)}{s(E)} = \dfrac{4}{25}$ bulunur.

Bilgi-İletişim Teknolojisi

Dinamik matematik yazılımını kullanarak bir tablolama programı çalıştıralım. Programında bir zarı 30, 100, 500 defa atma ve her birinden 3 gelme olasılığını bulma simülasyonu yapalım.

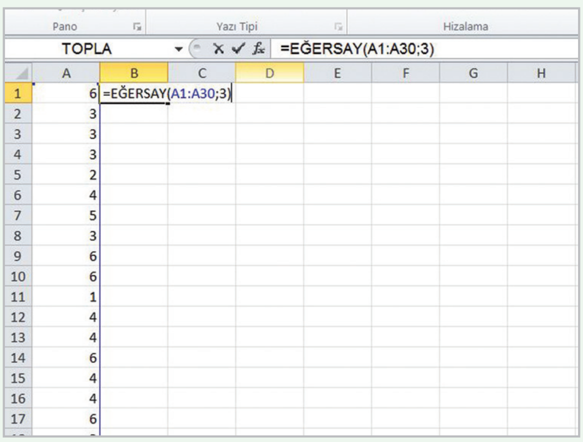
• RASTGELEARADA(a;b) komutu, verilen iki sayı arasındaki sayılardan birini rastgele seçer. a = 1, b = 6 seçilirse komutun yazıldığı hücrede pogram 1 ile 6 arasında rastgele bir sayı seçmektedir. Biz bu seçilen sayıyı zarda üste gelen sayı olarak düşünebiliriz.

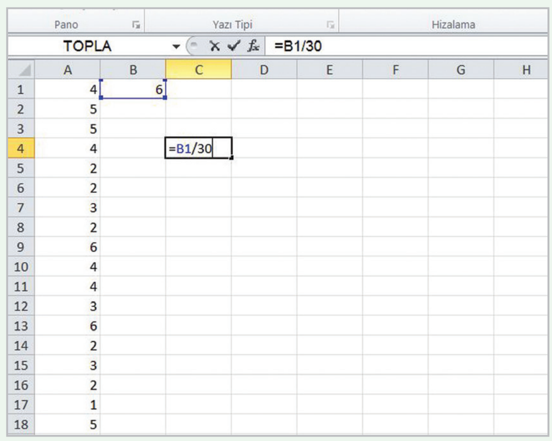


• Bu formülü bir hücreye yazıp altındaki 30 hücreye kopyalarsak 30 tane 1 ile 6 arasında rastgele sayı seçmiş olacağız.

• Bu 30 hücredeki 1-6 arası rakamların her birinin kaç tane bulunduğunu saymak için EĞERSAY (aralık, ölçüt) komutunu kullanırız.

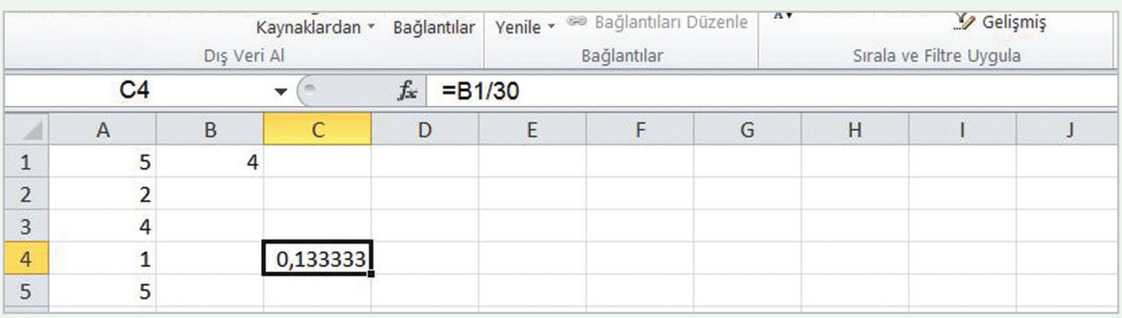
Komutu A1 hücresine yazıp A50 ye kadar kopyaladıysak B1 sütununa “= EĞERSAY (A1: A30; 3)” yazdığımızda program A1 ile A30 hücreleri arasında kaç tane 3 olduğunu bize verir.





• Kopyalama 30 yerine 100 hücreye kopyalanırsa 100 atış yapmış gibi kabul edebiliriz. Benzer şekilde A500 hücresine kadar kopyalarsak 500 defa zar atmış gibi düşünebiliriz.

• Olasılığı hesaplamak için ise başka bir hücreye “= B1/50”, veya “=B1/100” veya “=B1/500” yazarak “Enter” e basmak yeterlidir.



Alıştırmalar 7-2

1. Hilesiz bir madenî para 100 kez havaya atıldığında 44 kez tura geliyor. Buna göre paranın üst yüzünün tura olma olayının deneysel ve teorik olasılığını bulunuz.

2. Bir torbada 1'den 5'e kadar numaralandırılmış aynı büyüklükte beş bilye vardır. Bu torbadan, geri konulmak şartıyla 20 defa art arda bilye çekilmiş ve sonuçlar aşağıdaki tabloya yazılmıştır.

Bilye numarası	1	2	3	4	5
Çekiliş sayısı	5	4	3	6	2

Buna göre bu torbadan 21. kez bilye çekildiğinde çıkan hangi numaralı topun, deneysel olasılık değeri ile teorik olasılık değeri birbirine eşittir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

3. İçinde 1'den 5'e (1 ve 5 dâhil) kadar numaralandırılmış aynı büyüklükte toplar bulunan iki kutudan aynı anda rastgele birer top çekiliyor. 28 deneme sonucunda topların üzerindeki sayıların toplamı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Topların Üzerindeki Sayıların Toplamı	Deney Sayısı
2	3
3	4
4	1
5	5
6	3
7	3
8	4
9	2
10	3
Toplam	**28**

Buna göre topların üzerindeki sayıların toplamlarının 5 olma olasılığının deneysel ve teorik olasılıklarını bulunuz.

4. Hilesiz bir zar, 20 kez havaya atılıyor. Zarın üst yüzüne 5 kez 1, 2 kez 3, 3 kez 3, 2 kez 4, 3 kez 5, 5 kez 6 geliyor. Buna göre zarın 21. kez havaya atıldığında üst yüzüne gelen sayısının 5 olma olasılığının

a) Deneysel olasılık değerini bulunuz.

b) Teorik olasılık değerini bulunuz.

7. DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Hilesiz iki zar birlikte atılıyor. Buna göre aşağıdaki noktalı yerlere uygun ifadeleri yazarak cümleleri tamamlayınız.

a) Toplamlarının 6 olma olasılığı ....

b) İkisinin de aynı sayı gelme olasılığı ....

c) Çarpımlarının çift sayı olma olasılığı ....

ç) Her ikisinin de asal sayı gelme olasılığı ....

2. Bir torbada renkleri dışında özdeş 5 siyah, 4 beyaz, 2 mavi bilye vardır. Bu torbadan rastgele bir bilye çekiliyor. Buna göre aşağıdaki cümlelerin başında bulunan boş kutucuğa, ifade doğruysa "D", yanlış ise "Y" yazınız.

a) ☐ Siyah gelme olasılığı $\frac{2}{3}$'tür.

b) ☐ Mavi gelme olasılığı $\frac{2}{11}$'dir.

c) ☐ Siyah veya beyaz gelme olasılığı $\frac{9}{11}$'dir.

ç) ☐ Beyaz veya mavi gelme olasılığı $\frac{4}{11}$'dir.

3. Hilesiz bir zar iki kez havaya atılıyor üst yüze gelen sayıların toplamının 7'den büyük olma olasılığını bulunuz.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{5}{12}$

4. Bir torbada renkleri dışında özdeş 1'den 10'a kadar numaralandırılmış toplar vardır. Bu torbadan rastgele seçilen bir topun üzerindeki sayının asal sayı olduğu bilindiğine göre tek sayı olma olasılığını bulunuz.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{5}$

5. Hilesiz bir zar ve bir madenî para birlikte havaya atılıyor. Zarın üst yüzündeki sayının 3'ten küçük olması ve paranın yazı gelmesi olasılığı kaçtır?

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

6. 5 erkek ve a tane kız arasından rastgele seçilen 2 kişinin ikisinin de kız olma olasılığı $\frac{1}{6}$ ise a kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

7. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinin elemanlarıyla üç basamaklı sayılar oluşturuluyor ve bunlar arasından rastgele bir sayı seçiliyor. Seçilen sayının en az iki rakamının aynı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{7}{8}$

8. Hilesiz iki zar havaya atılıyor. Zarlardan birinin üzerindeki sayının 5 olduğu bilindiğine göre bu iki zarın üst yüzündeki sayıların toplamının 8'den büyük olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{5}{11}$ E) $\frac{1}{6}$

9. 3 erkek, 2 kız bir sıraya oturuyor. İki kızın yan yana olmama olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

10. A ile B bağımsız olaylardır. $P(A \cup B) = \frac{4}{9}$ ve $P(B) = \frac{1}{6}$ olduğuna göre P(A) kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

11. A ile B aynı örnek uzaya ait iki olaydır. $P(A) = \frac{5}{12}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ ve $P(A \cap B) = \frac{1}{9}$ ise $P(A \cup B)$ kaçtır?

A) $\frac{23}{36}$ B) $\frac{11}{18}$ C) $\frac{7}{12}$ D) $\frac{19}{36}$ E) $\frac{1}{2}$

12. Yanda renkleri dışında özdeş lacivert ve sarı torbalardaki bilyeler ve renkleriyle ilgili açıklama verilmiştir.

Buna göre iki torbadan herhangi birinden rastgele alınan bir bilyenin, alındığı torbanın rengiyle aynı olma olasılığı kaçtır?



A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{17}{35}$ E) $\frac{18}{35}$

13. Bir sınıfta 10 kız, 15 erkek öğrenci vardır. Sınıftaki 5 erkek öğrenci ve 3 kız öğrenci sarışındır. Bu sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin sarışın olmadığı bilindiğine göre bu öğrencinin kız öğrenci olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{7}{17}$ B) $\frac{6}{17}$ C) $\frac{5}{17}$ D) $\frac{4}{17}$ E) $\frac{3}{17}$

14. Bir fabrikada her 100 ampulün 75'ini A makinesi, 25'ini B makinesi üretmektedir. A'nın ürettiği ampullerin %12'si, B'nin ürettiği ampullerin %16'sı bozuktur. Seçilen bir ampulun bozuk olduğu bilindiğine göre B makinesinde üretilmiş olma olasılığını bulunuz.

A) $\frac{5}{13}$ B) $\frac{4}{13}$ C) $\frac{3}{13}$ D) $\frac{2}{13}$ E) $\frac{1}{13}$

15. İki torbadan birinde renkleri dışında özdeş 3 mavi, 4 kırmızı; diğerinde 4 mavi, 5 kırmızı bilye vardır. Torbalardan herhangi birinden rastgele seçilen bir bilyenin mavi olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{53}{126}$ B) $\frac{54}{126}$ C) $\frac{55}{126}$ D) $\frac{56}{126}$ E) $\frac{57}{126}$

16. Aşağıda verilen olasılıkların çeşitlerini noktalı yerlere yazınız?

a) Bir torbada, 3 mavi, 2 kırmızı ve 4 beyaz renkli özdeş top vardır. Torbadan rastgele toplar çekiliyor. Çekilen top torbaya geri atılıyor. Çekilen topun renginin baş harfi aşağıdaki gibi not ediliyor.

K, M, B, B, M, M, K, K, B

Buna göre çekilen topun kırmızı renkli olma olasılığının çeşidi .... olasılıktır.

b) Bir torbada 6 mavi, 4 kırmızı renkli özdeş top vardır. Bu torbadan rastgele çekilen bir topun mavi olma olasılığının çeşidi .... olasılıktır.

Yandaki tabloya göre 17, 18, 19 ve 20. soruları cevaplayınız.

Zeynep ve Atakan, hilesiz bir madenî parayı 10 kez havaya atıyorlar. Paranın üst yüzüne yazı ve tura gelme durumları yandaki tabloda verilmiştir.

Atış Sırası	Zeynep	Atakan
1.	Yazı	Yazı
2.	Tura	Yazı
3.	Yazı	Tura
4.	Tura	Yazı
5.	Tura	Yazı
6.	Tura	Tura
7.	Yazı	Yazı
8.	Yazı	Yazı
9.	Tura	Tura
10.	Tura	Yazı

17. Zeynep'in havaya attığı paranın üst yüzüne tura gelme olayının deneysel olasılık değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{7}{10}$ E) $\frac{9}{10}$

18. Atakan'ın havaya attığı paranın üst yüzüne tura gelme olayının deneysel olasılık değeri kaçtır?

A) $\frac{3}{10}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{7}{10}$ E) $\frac{9}{10}$

19. Atakan'ın havaya attığı paranın üst yüzüne yazı gelme olayının deneysel olasılık değeri kaçtır?

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{7}{10}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{9}{10}$

20. Zeynep'in havaya attığı paranın üst yüzüne yazı gelme olayının teorik olasılık değeri kaçtır?

A) $\frac{9}{10}$ B) $\frac{6}{9}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{4}$

Ölçme ve Değerlendirme Soruları

ALIŞTIRMA SORULARININ CEVAPLARI

Alıştırmalar (1-1)

1. C

2. A

3. C

4. a) 138° **b)** 157° **c)** 320° **ç)** 272° **d)** 60°

e) $\frac{7\pi}{6}$ **f)** $\frac{8\pi}{5}$ **g)** $\frac{5\pi}{7}$

5. $\frac{3\pi}{4}$

6. a) → I **b)** → V **c)** → VI **ç)** → IV

7. a) 22,5° **b)** 270° **c)** 144° **ç)** 630° **d)** 432°

8. a) D **b)** Y **c)** Y **ç)** Y **d)** Y **e)** D **f)** D

9. $13°39'30''$

Alıştırmalar (1-2)

1. En küçük değer –2, en büyük değer 0'dır.

2. $\sin x$

3. $\sin x$

4. $\operatorname{cosec}^4 x$

5. $\cos x - 1$

6. –

7. $+, -, +, -$

8. $b < a < d < c$

9. 1

10. $\sin\theta = \frac{3}{5}, \tan\theta = -\frac{3}{4}, \cot\theta = -\frac{4}{3}$

11. $\frac{3\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}{6}$

12. $\frac{1}{2}$

13. $-\frac{5}{12}$

14. $-\frac{5}{4}$

15. a) $-\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ç) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

16. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$

17. $\frac{5}{2}$

18. $\frac{1}{4}$

19. $\frac{\sqrt{5}}{10}$

20. $4\sqrt{3}$

21. $-\frac{5}{2}$

Alıştırmalar (1-3)

1. D

2. E

3. $\frac{7}{3}$

4. $\sqrt{34}$

5. D

6. $6\sqrt{6}$

7. $\frac{6\sqrt{3}}{13}$

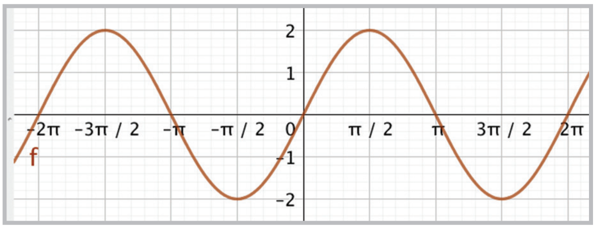
8. $\frac{3}{4}$

9. 3,16 m

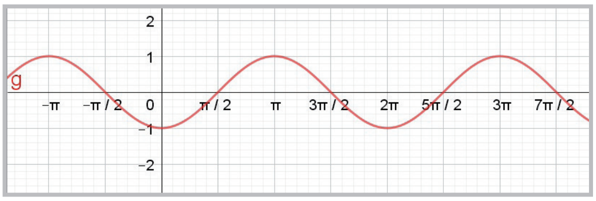
Alıştırmalar (1-4)

1. a) $\frac{2\pi}{5}$ **b)** π **c)** $\frac{2\pi}{3}$ **ç)** π

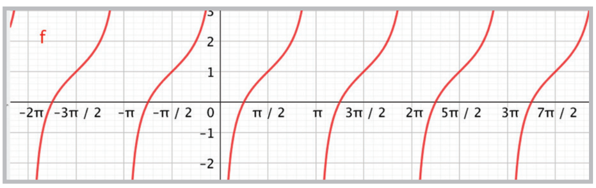
2. a)



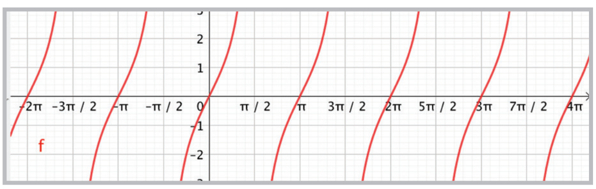
b)



c)



ç)



3. a) $\frac{\pi}{2}$ **b)** 0 **c)** $\frac{\pi}{4}$

4. $\frac{24}{7}$

5. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. $\frac{5\pi}{6}$

Alıştırmalar (2-1)

1. VI. bölge

2. I. bölge

3. $B(4,-2)$, $C(5,3)$, $D(-3,4)$

4. 3

5. $\sqrt{61}$ br

6. E

7. D

8. C

9. D

10. a) $A(4,5)$, $B(12,1)$

b) $|AB| = 4\sqrt{5}$ br

Alıştırmalar (2-2)

1. A

2. $5\sqrt{2}$

3. $\sqrt{10}$

4. -4

5. C

6. -16

7. A

8. B

Alıştırmalar (2-3)

1. **a)** 140° **b)** 125° **c)** 65° **ç)** 37°

2. **a)** $m_{AB} = -3$

b) $m_{CD} = \frac{4}{3}$

c) $m_{EF} = -\frac{1}{2}$

3. 10

4. **a)** $y = 2x - 1$

b) $y = -3x$

c) $y = \frac{x}{2}$

ç) $y = 4x$

5. A

6. B

7. **a)** $3x + 2y - 12 = 0$

b) $-5x + 4y - 10 = 0$

c) $x + y + 4 = 0$

8. **a)** $m_{d_1} = -\frac{3}{5}$

b) $m_{d_2} = \frac{1}{3}$

c) $m_{d_3} = 4$

ç) $m_{d_4} = -3$

9. D

10. E

11. C

12. $a = 6, \ b = -1$

13. $\frac{64}{9}$

Alıştırmalar (2-4)

1. $\frac{12}{5}$ br

2. $a = -4$ veya $a = \frac{5}{2}$

3. B

4. E

Alıştırmalar (3-1)

1. **a)** $a = 1, \ a = \frac{8}{3}$ **b)** -14

2. **a)** $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$ nda $f(x) < 0$, $\left(-6, \frac{1}{2}\right) \cup (5, 7)$ nda $f(x) > 0$

b) $(-6, 0), \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $(5, 0)$ noktalarında x eksenini, $(0, 1)$ noktasında y eksenini keser.

c) $-\frac{1}{2}$

ç) $[-6, -4]$ ve $[3, 7]$ nda artan, $[-1, 3]$ nda azalandır.

d) Maksimum değer 6, minimum değer –3'tür.

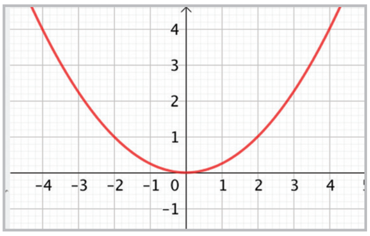
3. $\frac{4}{7}$

4. **a)** $f(x) = 3x + 1$ **b)** $f(20) = 61$ **c)** 3

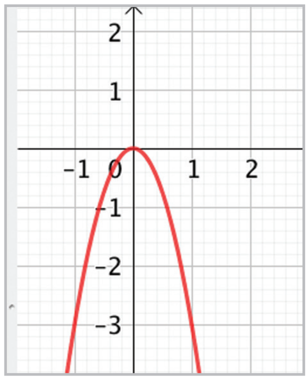
Alıştırmalar (3-2)

1. $f(x) = 2x^2 + 2x + 4$

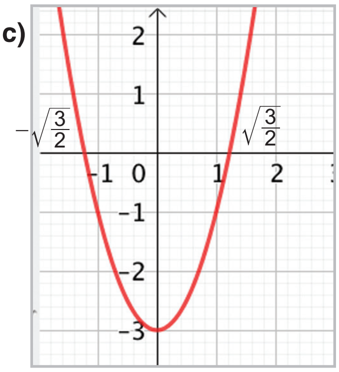
2. **a)**



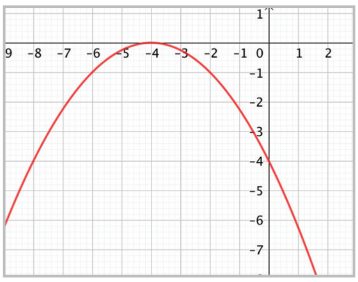
b)



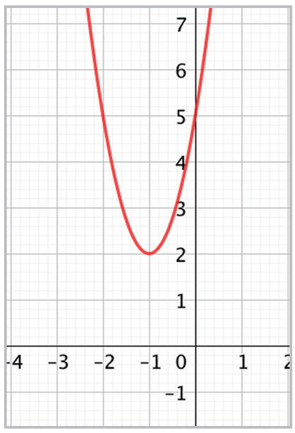
c)



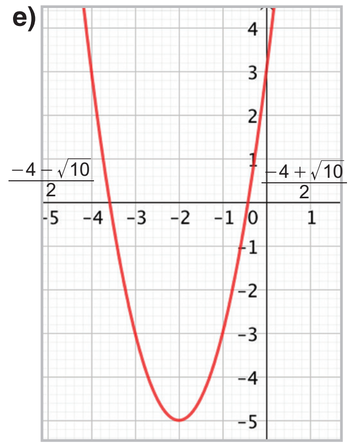
ç)



d)



e)



3. D

4. A

5. C

6. E

7. $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$

8. A

9. -2

10. $(-2, 3)$

11. $\left(\frac{15}{4}, \infty\right)$

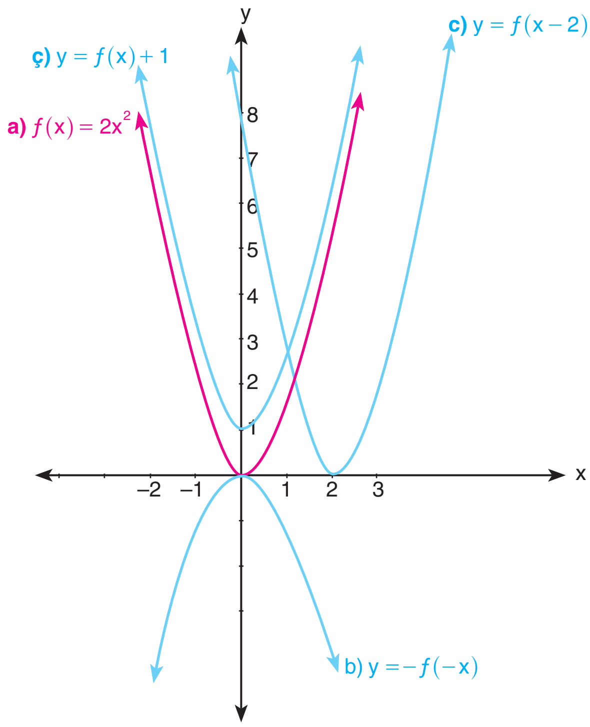
12. $f(t) = -t^2 + 100t$ (t saniye)

13. $b = 250$ m

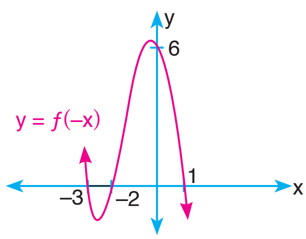
Alıştırmalar (3-3)

1. **a)** Y **b)** D **c)** D **ç)** Y

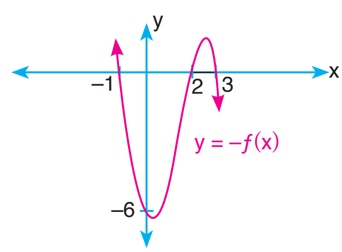
2.



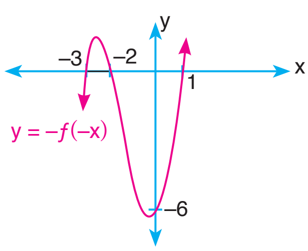
3. a)



b)



c)

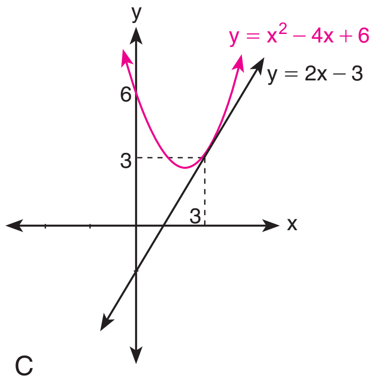


4. C

5. ƒ çift fonksiyon, h tek fonksiyon, g ne tek ne de çift fonksiyondur.

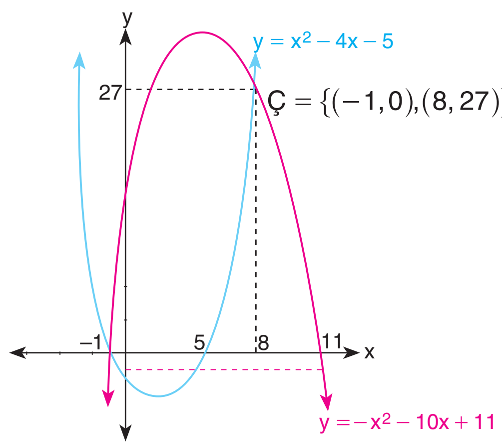
Alıştırmalar (4-1)

1. $Ç = \{(9,3)\}$
2. $Ç = \{(4,7)\}$
3. $Ç = \{(2\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-2\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -2\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, 2\sqrt{2})\}$
4.



5. C
6. $Ç_1 = \{(-\sqrt{5}, 1), (\sqrt{5}, 1), (-\sqrt{5}, -1), (\sqrt{5}, -1)\}$

   $Ç_2 = \{(-1, -\sqrt{5}), (-1, \sqrt{5}), (1, -\sqrt{5}), (1, \sqrt{5})\}$
7.



8. $Ç = \left\{\left(-\frac{5}{2}, -\frac{\sqrt{13}}{2}\right), \left(-\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{13}}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, -\frac{\sqrt{13}}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\right\}$

Alıştırmalar (4-2)

1. D
2. A
3. $Ç = (-\infty, -3] \cup [0, 2]$
4. $Ç = (-3, -1] \cup [4, \infty)$
5. A
6. $\mathbb{R}$
7. C
8. $Ç = (-\infty, -2) \cup \left(-1, \frac{1}{2}\right) \cup (2, \infty)$

Alıştırmalar (4-3)

1. $Ç = (2, 3)$
2. $Ç = (-\infty, -3] \cup (3, 5)$
3. D
4. $Ç = [-4, -3) \cup (0, 3)$

Alıştırmalar (5-1)

1. $\sqrt{5}$
2. 6
3. 5
4. $2\sqrt{5}$ cm
5. $8\sqrt{3}$
6. E
7. B

Alıştırmalar (5-2)

1. 100°
2. 24°
3. 68°
4. 115°
5. **a)** Y **b)** D
   c) Y **ç)** D
6. D
7. B
8. E
9. $\frac{3}{10}$

Alıştırmalar (5-3)

1. 12
2. 15
3. 9,6 cm
4. $2\sqrt{3}$
5. 8

Alıştırmalar (5-4)

1. 9
2. 40°
3. 11π
4. $\pi \cdot a^2$
5. $\frac{36}{13}$
6. $\frac{256\pi}{3}$
7. 36π
8. D

Alıştırmalar (6-1)

1. 9
2. B
3. **a)** $2\sqrt{2}$ cm
   b) 4π cm^2
   c) $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ cm^3
4. 54π
5. 100π
6. 32
7. 144π
8. 314
9. 144π
10. E
11. D

Alıştırmalar (7-1)

1. **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{2}{5}$
2. $\frac{1}{4}$
3. $\frac{1}{4}$
4. $\frac{3}{8}$
5. $\frac{1}{4}$
6. $\frac{3}{11}$
7. $\frac{5}{11}$
8. $\frac{3}{5}$
9. $\frac{3}{10}$
10. C
11. A
12. E
13. **a)** $\frac{1}{56}$ **b)** $\frac{5}{56}$ **c)** $\frac{23}{28}$
14. $\frac{1}{4}$
15. $\frac{25}{64}$

Alıştırmalar (7-2)

1. Teorik olasılık $\frac{1}{2}$, deneysel olasılık $\frac{11}{25}$
2. D
3. Deneysel olasılık $\frac{5}{28}$, teorik olasılık $\frac{4}{25}$
4. **a)** $\frac{3}{20}$
   b) $\frac{1}{6}$

DEĞERLENDİRME SORULARININ CEVAPLARI

1. TRİGONOMETRİ

1. C
2. E
3. B
4. A
5. B
6. C
7. A
8. D
9. E
10. E
11. A
12. A
13. C
14. C
15. A
16. D
17. B
18. **a)** Y **b)** D **c)** D **ç)** Y
19. B
20. B
21. E
22. B
23. C
24. A
25. E
26. D
27. E

2. ANALİTİK GEOMETRİ

1. **a)** 5
b) y
c) 1
ç) -2
d) $<, >$
2. **a)** D **b)** D **c)** Y **ç)** Y **d)** D **e)** Y
3. D
4. E
5. C
6. C
7. A
8. D
9. A
10. B
11. D
12. B
13. C
14. D
15. C
16. D
17. A
18. B
19. E
20. B
21. E
22. C
23. A
24. C
25. B
26. D

3. FONKSİYONLARDA UYGULAMALAR

1. **a)** tek fonksiyon
b) 6
c) 1
ç) negatif
d) $f(x+3)$
e) tepe
2. **a)** Y **b)** D **c)** D
ç) D **d)** Y **e)** Y
3. D
4. B
5. A
6. C
7. C
8. B
9. E
10. A
11. D
12. A
13. D
14. C
15. A
16. B
17. B
18. D
19. A
20. E
21. E
22. D

4. DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER SİSTEMLERİ

1. A
2. A
3. B
4. E
5. C
6. D
7. D
8. B
9. C
10. C
11. D
12. A
13. C
14. E
15. B
16. A
17. **a)** $\{-5\}$ **b)** 2
c) $Ç=\{(2,4)\}$ **ç)** $\mathbb{R}$
18. B
19. E
20. D

5. ÇEMBER VE DAİRE

1. **a)** paralel
   b) yayların
   c) iki farklı noktada
   ç) çember
2. **a)** D **b)** Y **c)** Y **ç)** D
3. Öğrenciye bırakılmıştır.
4. E
5. C
6. E
7. C
8. A
9. B
10. D
11. C
12. C
13. A
14. B
15. A
16. D
17. B
18. C
19. D
20. A
21. C
22. C
23. A
24. D

6. KATI CİSİMLER

1. **a)** dik silindir
   b) taban çevresi, yükseklik
   c) dik koni
   ç) küre
2. **a)** Y **b)** Y **c)** D **ç)** D
3. B
4. C
5. C
6. E
7. D
8. D
9. E
10. A
11. A
12. B
13. A
14. A
15. A
16. B
17. D
18. C
19. E

7. OLASILIK

1. **a)** $\frac{5}{36}$ **b)** $\frac{1}{6}$ **c)** $\frac{3}{4}$ **ç)** $\frac{1}{4}$
2. **a)** Y **b)** D **c)** D **ç)** Y
3. E
4. D
5. E
6. C
7. C
8. D
9. B
10. B
11. A
12. E
13. A
14. B
15. C
16. **a)** deneysel
    b) teorik
17. B
18. A
19. C
20. D

SEMBOLLER, KISALTMALAR VE ANLAMLARI

$=$	Eşit
$\neq$	Eşit değil
$\approx$	Yaklaşık
$\geq$	Büyük veya eşit
$>$	Büyük
$\leq$	Küçük veya eşit
$<$	Küçük
$^\circ$	Derece
$\in$	Elemanı
$\notin$	Elemanı değil
$\subset$	Alt küme
$\perp$	Dik
//	Paralel
∞	Sonsuz
$\lvert x \rvert$	x in mutlak değeri
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Gerçek sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\Rightarrow$	İse
$\Leftrightarrow$	Ancak ve ancak
$\forall$	Her
$[AB$	AB ışını
$[AB]$	AB doğru parçası
$\lvert AB \rvert$	AB doğru parçasının uzunluğu
$[a,b]$	Kapalı aralık
(a,b)	Açık aralık
$[a,b)$	a dan kapalı, b den açık aralık
$(a,b]$	a dan açık, b den kapalı aralık
r	Yarıçap

m	Eğim
$'$	Dakika
$''$	Saniye
R	Radyan
π	Pi sayısı
$\varnothing$	Boş küme
$\cap$	Kesişim
$\cup$	Birleşim
S	Yüzey alanı
V	Hacim
A'	A olayının tümleyeni
E	Örnek uzay
$P(A)$	A olayının gerçekleşme olasılığı
$P(A \cap B)$	A ve B olaylarının gerçekleşme olasılığı
$P(A \cup B)$	A veya B olaylarının gerçekleşme olasılığı
$P(A \mid B)$	A olayının B ye bağlı koşullu olasılığı
$A(x,y)$	x apsis y ordinatlı A noktası
sin	Sinüs
cos	Kosinüs
tan	Tanjant
cot	Kotanjant
sec	Sekant
cosec	Kosekant
T	Periyot
$f(x+T)$	Periyodik fonksiyon
br	Birim
br^2	Birimkare
br^3	Birimküp

SÖZLÜK

A

açı : Ortak başlangıç noktasına sahip iki ışının bileşimi.

açınım : Bir cismin yüzeylerinin açılıp bir düzlem üzerine yayılması.

açıortay : Bir açıyı birbirine eş iki açıya ayıran ışın.

ağırlık merkezi : Bir üçgenin kenarortaylarının kesiştiği nokta.

apsis : Düzlemde bir noktanın birinci bileşeni.

ara kesit : Çizgilerin, yüzeylerin, katı cisimlerin birbirine rastladıkları ve kesiştikleri yer.

ayrıt : İki düzlemin ara kesiti.

B

bağımlı olay : Bir olayın gerçekleşme olasılığının başka bir olayı etkileme durumu.

birim çember : Yarıçapı bir birim olan ve merkezi orijinde bulunan çember.

Ç

çap : Bir çemberin merkezinden geçen bir doğrunun, çemberi kestiği iki nokta arasındaki uzaklık.

çember : Merkez denilen sabit bir noktadan aynı uzaklık ve düzlemdeki noktalar kümesinin oluşturduğu kapalı eğri.

çözüm kümesi : Bir denklemin ya da denklem sisteminin çözümünden oluşan küme.

D

daire : Bir çemberle iç bölgesinin birleşimi.

denklem : İçinde yer alan bazı niceliklere ancak uygun bir değer verildiği zaman sağlanabilen eşitlik.

denklem sistemi : İki veya daha fazla denklemden oluşan sistem.

derece : Bir çemberin 360 eşit parçasından birini gören merkezî açı.

E

eğim açısı : Düzlemde bir doğrunun yatay eksenle yaptığı pozitif yönlü açı.

eksen : Üzerinde bir yön belirlenmiş doğru.

eşitsizlik : Bir çokluğun bir diğerinden küçük, küçük ya da eşit, büyük, büyük ya da eşit olduğunu bildiren önerme.

F

fonksiyon : Bağımsız değişkenler ile bağımlı değişken arasındaki ilişkinin matematiksel ifadesi.

H

hacim : Bir cismin uzayda kapladığı boşluk.

hipotenüs : Bir dik üçgende, dik açının karşısında bulunan kenar.

I

ışın : Bir noktadan çıkıp sonsuza giden yarım doğrulardan her biri.

K

kenarortay : Üçgenin bir köşesi ile karşı kenarının orta noktasını birleştiren doğru parçası.

kesen : Bir çemberi farklı iki noktada kesen doğru.
kiriş : Bir çemberin iki noktasını birleştiren doğru parçası.
küre : Bütün noktaları merkezden aynı uzaklıkta bulunan bir yüzeyle sınırlı cisim.

N

negatif yön : Saatin dönme yönü.

O

olasılık : Bir olayın olabilirlik değerinin 0 ile 1 (0 ve 1 dâhil) arasındaki bir gerçek sayıyla gösterilmiş biçimi.
olay : Bir deney ya da bir oluşumdan elde edilebilecek tüm sonuçların bir alt kümesi.
ordinat : Düzlemde bir noktanın ikinci bileşeni.
orijin : 1. Başlangıç noktası. 2. Analitik düzlemde O (0, 0) noktası.
orta dikme : Düzlemde bir doğru parçasına orta noktasında dik olan doğru.

Ö

özdeş : Biçimleri, değerleri ya da işlevleri eş olan.

P

periyot : Tekrarlanan olaylar arasında geçen sabit zaman aralığı.
pozitif yön : Saatin dönme yönünün tersi.

R

radyan : Bir çemberde, uzunluğu yarıçapa eşit olan bir yayın belirlediği açının ölçüsü.

S

saniye : 1. Bir dakikanın altmışta biri olan zaman birimi. 2. Bir derecenin üç bin altı yüzde biri.
silindir : Alt ve üst tabanları birbirine eşit dairelerden oluşan bir nesnenin eksenini dikey olarak kesen, birbirine paralel iki yüzeyin sınırladığı cisim.
simetri : Eksen olarak alınan bir doğrudan, benzer noktaları karşılıklı olarak aynı uzaklıkta bulunan iki benzer parçanın birbirine göre durumu.

T

teğet : Bir eğriye sadece bir noktada değen doğru.

Y

yay : Bir çember üzerindeki iki nokta ile bu nokta arasındaki çember parçası.
yönlü açı : Işınlarından biri başlangıç, diğeri bitiş ışını olan açı.

KAYNAKÇA

Jurgensen, Ray C., Richard G. Brown ve John W. Jurgensen. *Geometry*. USA: Houghton Mifflin, 2000.

Larson, Ron, Laurie Boswell, Timothy D. Kanold ve Lee Stiff. *Geometry*. Boston: McDougal Littell, 2007.

Matematik Dersi Öğretim Programı (Ortaöğretim 9, 10, 11 ve 12. Sınıflar). Ankara: MEB, 2018.

Serra, Michael. *Discovering Geometry An Investigative Approach*. USA: Key Curriculum Press, 2008.

Swokowski, Earl William. *Calculus With Analytic Geometry*. USA: Prindle, Weber & Schmidt, 1979.

Thomas, George B. ve Ross L. Finney. *Calculus and Analytic Geometry*. USA: Addision-Wesley Publishing Company, 1998.

Türkçe Sözlük. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları, 2019.

Yazım Kılavuzu. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları, 2021.

(Kitabın kaynakça bölümü Chicago Kaynakça Sistemi esas alınarak düzenlenmiştir.)

GENEL AĞ KAYNAKÇASI

https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/tezDetay.jsp?id=RnbvVaiBJDO6T82xsTX2_Q&no=FpvdrjiWWqOTnYDzQ2LI_g (15.05.2022)

https://www.academia.edu/30601143/Atat%C3%BCrk_%C3%BCn_Geometri_Kitab%C4%B1nda_Yer_Alan_Terimlerin_G%C3%BCn%C3%BCm%C3%BCzde_Kullan%C4%B1m_Durumlar%C4%B1 (12.01.2022)

https://web.itu.edu.tr/guzelah/mak/makpage.html (02.01.2022)

http://dusuncetarihi.kapadokya.edu.tr/makale/duesuenceler.html (04.01.2022)

GÖRSEL KAYNAKÇA

Kitapta kullanılan resimlemeler, yayınevi görsel tasarım uzmanı tarafından hazırlanmıştır.

www.shutterstock.com (Telif hakkı ödenerek satın alınmıştır.)

Bu kitabın görsel kaynakçasına yanda verilen karekod ile ulaşabilirsiniz.